3. Заключения. Исследованы свойства поверхностных волн в вязкоупругом полом цилиндре. Найдено, что в полом вязкоупругом цилиндре существуют две комплексные нормальные волны, реальные части которых в предельном случае приближаются к скорости волн Рэлея.

Установлено, что поверхностные волны в полом вязкоупругом цилиндре локализуются на внешней и внутренней свободной поверхностях цилиндра.

Список исползованной литературы:

(1). Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid, Proc. Lond. Math. Soc. 1885/1886, 17, № 253, p. 4–11.

(2). Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн. Физ. Акустика. Принципы и методы (пер. с англ.). 1973, 6, с. 137–202.

(3). Викторов И.А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах, 1979, 25, № 1, с. 1–17.

(4). Oliver J. A summary of observed seismic surface wave dispersion. Bull. Seism. Soc. Amer. 1959, 52, № 1, p. 81–90.

(5). Owen T.E. Surface wave phenomena in ultrasonics. Progr. Appl. Matter. Resch. 1964, 6, p. 69–87.

(6). Uberal H. Surface waves in acoustics. Phys. acoustics: Principles and metods. 10, 1973, p. 1–60.

(7). Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К., "Наук. думка", 1981, 283 с.

(8). Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью. "Прикл. мех.", 1984, 20, № 8, с. 25–29.

(9). Комиссарова Г.Л. К решению задачи о распространении волн в цилиндре с жидкостью. Прикл. мех. 1990, 26, № 8, с. 25–29.

(10). Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах. Акуст. вісн., 2000, 3, № 3, с. 44–55.

(11). Комиссарова Г.Л. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах. "Прикл. мех.", 2002, 38, № 1, с. 124–134.

(12). Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Особенности динамического деформирования полого цилиндра. "Прикл. мех.", 1986, 22, № 5, с. 3–8.

(13). Rosenberg R.L., Thurston R.N. Relationship between plate and surface modes of a tube. J.Acoust. Soc. Amer. 1977, 61, № 6, p. 1499–1502.

(14). Thurston R.N. Elastic waves in rod and clad rods. J. Acoust. Soc. Amer. 1978, 64, № 1, p. 1–37.

(15). Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К., "Наук. думка", 1978, 264 с.

(16). Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновое процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. Германия, LAP, Lambert Academic Publishing. 212–220 p.

(17). Сафаров И.И., Болтаев З.И. Распространение гармонических волн в пластинке переменной толщины. Известия высших учебных заведений Поволжский регион. «Физико-математические науки». 2011, № 4 (20), с. 24345.

Кутлымуратов Баймурат Жиенбаевич (КГУ им. Бердаха, Нукус, Узбекистан)

О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ГРАНИЧНЫМ СВОЙСТВОМ МОРЕРА

Аннотация. *В этой работе устанавливается аналог многомерной граничной теоремы Морера для матричного шара третьего типа – области, образованной векторами кососимметрических матриц. В отличие от известных результатов для непрерывных функций [1,2,3], здесь рассматриваются интегрируемые функции класса* $L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$, $p \geq 1$. *Полученный результат обобщает теорему Нагеля-Рудина на случай интегрируемых функций на остове матричного шара третьего типа.*

Ключевые слова: *матричный шар третьего типа, кососимметрические матрицы, граничная теорема Морера, автоморфизмы, ядро Пуассона, интегрируемые функции.*

Qutlimuratov Baymurat Jienbaevich (Berdaq nomidagi QQDU, Nukus, O'zbekiston)

CHEGARAVIY MORERA XOSSASIGA EGA INTEGRALLANUVCHI FUNKSIYALARNING GOLOMOR DAVOM ETTIRILISHI HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu ishda uchinchi tipdagi matritsaviy shar – kososimmetrik matritsalar vektorlaridan tashkil topgan soha uchun ko'p o'lchovli chegaraviy Morera teoremasining analogi isbotlangan. Uzluksiz funksiyalar uchun ma'lum bo'lgan natijalardan [1,2,3], farqli ravishda, bu yerda* $L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$,

$p \geq 1$ *sinfiga mansub integrallanuvchi funksiyalar qaraladi. Olingan natija Nagel–Rudin teoremasini uchinchi tipdagi matritsaviy sharning ostovida berilgan integrallanuvchi funksiyalar holiga umumlashtiradi.*

Kalit so'zlar: *uchinchi tipdagi matritsaviy shar, kososimmetrik matritsalar, chegaraviy Morera teoremasi, avtomorfizmlar, Puasson yadrosi, integrallanuvchi funksiyalar.*

Kutlymuratov Baimurat Zhiyenbayevich (Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan)

ABOUT THE HOLOMORPHIC EXTENSION OF INTEGRABLE FUNCTIONS WITH THE BOUNDARY MORERA PROPERTY

Annotation. *This paper establishes an analogue of the multidimensional boundary Morera theorem for the matrix ball of the third type, i.e., the domain formed by vectors of skew-symmetric matrices. In contrast to the known results for continuous functions [1,2,3], we consider integrable functions belonging to the class* $L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$, $p \geq 1$. *The obtained result extends the Nagel–Rudin theorem to the case of integrable functions defined on the Shilov boundary of the matrix ball of the third type.*

Keywords: *matrix ball of the third type, skew-symmetric matrices, boundary Morera theorem, automorphisms, Poisson kernel, integrable functions.*

Введение. Теорема Морера является одной из фундаментальных теорем комплексного анализа. В одномерном случае она утверждает, что если непрерывная функция на области комплексной плоскости имеет нулевые интегралы по границам всех треугольников, то она голоморфна. Особый интерес представляют многомерные граничные варианты теоремы Морера, где условия налагаются на интегралы вдоль специальных семейств комплексных кривых, связанные с автоморфизмами области.

Отправной точкой многих исследований послужил результат Нагеля и Рудина [4] для единичного шара в $\mathbb{C}^n$: если непрерывная функция f на сфере удовлетворяет

$$\int_0^{2\pi} f(\psi(e^{i\phi},0,\ldots,0))e^{i\phi}d\phi = 0$$

для всех голоморфных автоморфизмов ψ шара, то f голоморфно продолжается в шар. Альтернативное доказательство С.Косбергенова [5] позволило обобщить этот результат на классические области первого, второго, третьего и четвёртого типов [6]. Для матричного шара первого типа в работе [7] была доказана граничная теорема Морера для непрерывных функций. Для матричных шаров второго и третьего типов аналогичные результаты для непрерывных функций получены У. Рахмоновым [1,2,3].

В настоящей статье мы рассматриваем матричный шар третьего типа – область, образованную векторами *кососимметрических* матриц. Напомним: комплексная квадратная матрица Z порядка m называется кососимметрической, если $Z = -Z'$, где Z' – транспонированная матрица. Эта область соответствует классической области третьего типа в смысле Э.Картана.

Основная часть. Пусть $Z = (Z_1,\ldots,Z_n)$ – вектор, составленный из комплексных кососимметрических матриц Z_j порядка m, т.е. для каждого $j = 1,\ldots,n$ выполнено $Z_j = -Z_j'$.

Рассмотрим матричное скалярное произведение:

$$\langle Z,W\rangle = \sum_{j=1}^{n} Z_j\overline{W_j},$$

где $\overline{W_j}$ – комплексное сопряжение.

Определение 1 ([1]). Матричным шаром третьего типа называется область

$$\mathrm{B}^3_{mn} = \left\{Z = (Z_1,\ldots,Z_n) : Z_j = -Z_j',\ j = 1,\ldots,n,\ I^{(m)} + \langle Z,\overline{Z}\rangle > 0\right\},$$

где $I^{(m)}$ – единичная матрица порядка m, а неравенство означает положительную определённость эрмитовой матрицы.

Определение 2 (1). Остовом (границей Шилова) области B^3_{mn} называется многообразие

$$\mathrm{X}^3_{mn} = \left\{ Z : Z_j = -Z'_j,\ j = 1,\ldots,n,\ \langle Z, \overline{Z} \rangle = -I^{(m)} \right\}.$$

Размерность пространства кососимметрических матриц порядка m равна $\frac{m(m-1)}{2}$. Поэтому комплексная размерность B^3_{mn} равна $\frac{m(m-1)}{2}n$, а размерность остова X^3_{mn} равна $\frac{m(m-1)}{2}(2n-1)$.

Обозначим через $H^p(\mathrm{B}^3_{mn})$ класс всех функций F ,голоморфных в B^3_{mn}, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathrm{X}^3_{mn}} |F(r\zeta)|^p d\mu(\zeta) < +\infty,$$

где $d\mu$ – нормированная мера Хаара на X^3_{mn}, инвариантная относительно автоморфизмов [9]. Для $p \geq 1$ через $L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$ обозначим класс интегрируемых в p – й степени функций на X^3_{mn} относительно меры $d\mu$.

Для любой функции $f \in L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$ и для любого $\zeta \in \mathrm{X}^3_{mn}$ рассмотрим срез-функцию $f_\zeta(t) = f(t\zeta)$ при $t \in \mathbb{C}$, $|t| < 1$.

Известно ([2, 3]), что автоморфизм матричного шара третьего типа, переводящий точку $P \in \mathrm{B}^3_{mn}$ в 0, имеет вид

$$\varphi_P(Z) = \overline{R}^{-1}(I^{(m)} + \langle Z, \overline{P} \rangle)^{-1} \sum_{s=1}^{n} (Z_s - P_s) G_{sk}, \quad k = 1,\ldots,n,$$

где матрицы R и $G = (G_{sk})$ удовлетворяют условиям

$$\overline{R}(I^{(m)} + \langle P, \overline{P} \rangle) R' = I^{(m)}, \quad G^*(I^{(mn)} + \overline{P}'P)G = I^{(mn)}.$$

При доказательстве основного результата мы воспользуемся следующими утверждениями, относительно класса интегрируемых функций.

Лемма 1. Пусть $d\mu$ – нормированная мера Хаара на остове X^3_{mn} матричного шара B^3_{mn}. Элемент объёма $d\mu$ может быть записан в виде

$$d\mu = \frac{d\varphi}{2\pi} \wedge d\mu' = \frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t} \wedge d\mu',$$

где $d\mu'$ – дифференциальная форма, определяющая положительную меру на многообразии $(\mathrm{X}^3_{mn})'$, которое получается из X^3_{mn} фиксированием одной из угловых переменных. При этом для любой функции $f \in L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$, $(p \geq 1)$ справедливо равенство

$$\int_{\mathrm{X}^3_{mn}} |f(\zeta)|^p d\mu(\zeta) = \int_{(\mathrm{X}^3_{mn})'} d\mu'(\lambda) \int_0^{2\pi} |f(e^{i\phi}\lambda)|^p \frac{d\phi}{2\pi} \tag{1}$$

Доказательство. Остов X^3_{mn} состоит из всех векторов $Z = (Z_1,\ldots,Z_n)$ кососимметрических матриц с условием $\langle Z, \overline{Z} \rangle = -I^{(m)}$. Рассмотрим окружность $T = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$. Для каждого $t \in T$ определим отображение $Z \mapsto tZ = (tZ_1,\ldots,tZ_n)$. Если $tZ = Z$ для некоторого $Z \neq 0$, то $t = 1$. Таким образом, точки Z и tZ различны при $t \neq 1$, и каждому Z соответствует

целая окружность $\{tZ : t \in T\}$. Выберем на каждой такой окружности единственную точку, фиксируя, например, аргумент первой матричной компоненты. Точнее, потребуем, чтобы в матрице Z_1 элемент, стоящий в левом верхнем углу, был положительным вещественным числом. Множество всех точек X^3_{mn}, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $(\mathrm{X}^3_{mn})'$. Тогда $(\mathrm{X}^3_{mn})'$ является гладким многообразием размерности на единицу меньше, чем X^3_{mn}, и каждая точка $\zeta \in \mathrm{X}^3_{mn}$ единственным образом представляется в виде $\zeta = t\lambda$ с $\lambda \in (\mathrm{X}^3_{mn})'$, $t \in T$. Мера Хаара $d\mu$ на X^3_{mn} инвариантна относительно умножения на $t \in T$. В координатах (λ, t) мера записывается как произведение: $d\mu = \dfrac{d\phi}{2\pi} \wedge d\mu'$. Переходя к комплексной переменной $t = e^{i\phi}$ и применяя теорему Фубини, получаем (1).

Лемма 2 (инвариантность класса L^p). Пусть $f \in L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$, $(p \geq 1)$. Тогда для любого автоморфизма ψ матричного шара B^3_{mn} функция $f \circ \psi$ также принадлежит $f \in L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$.

Доказательство. Для произвольного автоморфизма ψ области B^3_{mn} рассмотрим меру $d\mu(\psi^{-1}(\zeta))$. Согласно [8], справедливо

$$d\mu(\psi^{-1}(\zeta)) = P(\psi^{-1}(\zeta), 0) d\mu(\zeta),$$

где

$$\mathrm{P}(Z, W) = \left(\frac{\det(I^{(m)} + \langle W, \overline{W} \rangle)}{\left| \det(I^{(m)} + \langle Z, \overline{W} \rangle) \right|^2} \right)^{\frac{m-1}{2} n}$$

есть ядро Пуассона для матричного шара третьего типа (для чётного m; для нечётного m показатель степени $\dfrac{m}{2} n$ [3]). Функция $h(\zeta) = P(\psi^{-1}(\zeta), 0)$ непрерывна и положительна на компактном X^3_{mn}, следовательно, $h(\zeta) \geq \delta > 0$ для некоторого δ. Замена переменных $W = \psi(\zeta)$ даёт

$$\int_{\mathrm{X}^3_{mn}} |f(\psi(\zeta))|^p \, d\mu(\zeta) = \int_{\mathrm{X}^3_{mn}} |f(W)|^p \frac{1}{h(W)} d\mu(W) \leq \frac{1}{\delta} \int_{\mathrm{X}^3_{mn}} |f(W)|^p \, d\mu(W) < \infty.$$

Таким образом, $f \circ \psi \in L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$.

Основной результат.

Теорема 3. Пусть $f \in L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$, $(p \geq 1)$. Если функция f удовлетворяет условию Морера

$$\int_T f(\psi(t\lambda)) dt = 0 \qquad (2)$$

для всех автоморфизмов ψ матричного шара B^3_{mn} и почти всех $\lambda \in \mathrm{X}^3_{mn}$ (здесь $T = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$), то f является радиальным граничным значением на X^3_{mn} некоторой функции $F \in H^p(\mathrm{B}^3_{mn})$.

Доказательство. Сначала переводим условие (2) к интегралу по остову. Умножая (2) на $d\mu'(\lambda)$ и интегрируя по $(\mathrm{X}^3_{mn})'$, с учётом леммы 1 для $f \in L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$ получаем

$$\int_{\mathrm{X}^3_{mn}} f(\psi(\zeta))d\mu(\zeta) = 0 \tag{3}$$

Рассмотрим $k-$ю компоненту вектора ζ. Умножая (2) на $\lambda_k d\mu'(\lambda)$ и интегрируя по $(\mathrm{X}^3_{mn})'$, аналогично получаем

$$\int_{\mathrm{X}^3_{mn}} f(\psi(\zeta))\zeta_k d\mu(\zeta) = 0, \quad k = 1,\ldots,\frac{m(m-1)}{2}n. \tag{4}$$

Пусть $\varphi_P -$ автоморфизм, переводящий $P \in \mathrm{B}^3_{mn}$ в 0. Подставим в (4) вместо ψ автоморфизм φ_P^{-1} и сделаем замену $W = \varphi_P^{-1}(\zeta)$. Получаем

$$\int_{\mathrm{X}^3_{mn}} f(W)\left[\varphi_P^{-1}(W)\right]_k d\mu(\varphi_P(W)) = 0 \tag{5}$$

Известно [8, 9], что $d\mu(\varphi_P(W)) = \mathrm{P}(W,P)d\mu(W)$. С точностью до невырожденной матрицы $M(P)$ имеем $[\varphi_P^{-1}(W)]_k = \varphi_P^k(W)\cdot M(P)$. Из (5) получаем

$$\int_{\mathrm{X}^3_{mn}} f(W)\varphi_P^k(W)\mathrm{P}(W,P)d\mu(W) = 0, \quad \forall P \in \mathrm{B}^3_{mn}, \forall k. \tag{6}$$

Рассмотрим интеграл Пуассона:

$$F(P) = \int_{\mathrm{X}^3_{mn}} f(W)\mathrm{P}(W,P)d\mu(W), \quad P \in \mathrm{B}^3_{mn}. \tag{7}$$

Функция $F(P)$ вещественно аналитическая в B^3_{mn}. Далее нам понадобится следующая

Лемма 3. Для автоморфизма φ_P и ядра Пуассона $\mathrm{P}(W,P)$ справедливы следующие тождества:

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\overline{p}_{sp}\varphi_P^{sp}(W) = \mathrm{Sp}\left[(I+\langle P,\overline{P}\rangle)^{-1} - (I+\langle W,\overline{P}\rangle)^{-1}\right], \tag{8}$$

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\overline{p}_{sp}\frac{\partial \mathrm{P}(W,P)}{\partial \overline{p}_{sp}} = \alpha n \mathrm{P}(W,P)\left[\mathrm{Sp}(I+\langle W,\overline{P}\rangle)^{-1} - \mathrm{Sp}(I+\langle P,\overline{P}\rangle)^{-1}\right], \tag{9}$$

где $\alpha = \dfrac{m-1}{2}$ для чётного m и $\alpha = \dfrac{m}{2}$ для нечётного m.

Доказательство леммы 3. Из явного вида автоморфизма имеем

$$\varphi_P(W) = \overline{R}^{-1}(I+\langle W,\overline{P}\rangle)^{-1}(W-P)G,$$

где $\overline{R}(I+\langle P,\overline{P}\rangle)R' = I$, $G^*(I^{(mn)} + \overline{P}'P)G = I$. Рассмотрим след $\mathrm{Sp}(\varphi_P(W)P^*)$. Используя свойство следа и соотношение $GP^* = (I+\langle P,\overline{P}\rangle)^{-1}\overline{R}^{-1}$, после преобразований получаем

$$\mathrm{Sp}(\varphi_P(W)P^*) = \mathrm{Sp}\left[(I+\langle W,\overline{P}\rangle)^{-1}(W-P)(I+\langle P,\overline{P}\rangle)^{-1}\right].$$

Преобразуя $(W-P)(I+\langle P,\overline{P}\rangle)^{-1} = (I+\langle W,\overline{P}\rangle)^{-1} - (I+\langle P,\overline{P}\rangle)^{-1}$, получаем (8).

Для доказательства (9) продифференцируем ядро Пуассона, используя правило дифференцирования определителя, и после суммирования по s,p с весами $\overline{p}_{sp}$ и применения тождества $\mathrm{Sp}((I+X)^{-1}X) = \mathrm{Sp}(I-(I+X)^{-1})$ получаем (9).

Продолжим доказательство теоремы. Сравнивая (8) и (9), получаем

$$\sum_{s,p}\overline{p}_{sp}\varphi_P^{sp}(W)=\frac{1}{\alpha n}\sum_{s,p}\overline{p}_{sp}\frac{\partial \mathrm{P}(W,P)}{\partial \overline{p}_{sp}}\cdot \mathrm{P}(W,P)^{-1}.$$

Подставляя в (6), имеем

$$\sum_{s,p}\overline{p}_{sp}\int_{\mathrm{X}_{mn}^3} f(W)\frac{\partial \mathrm{P}(W,P)}{\partial \overline{p}_{sp}}d\mu(W)=0.$$

Поскольку $\mathrm{P}(W,P)$ вещественно аналитическая по P, а $f\in L^p(\mathrm{X}_{mn}^3)\subset L^1(\mathrm{X}_{mn}^3)$, то по теореме Лебега дифференцирование под знаком интеграла законно. Следовательно,

$$\sum_{s,p}\overline{p}_{sp}\frac{\partial F(P)}{\partial \overline{p}_{sp}}=0,\quad \forall P\in \mathrm{B}_{mn}^3 \tag{10}$$

Разложим $F(P)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$F(P)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0} c_{\alpha,\beta}P^{\alpha}\overline{P}^{\beta},$$

где $|\alpha|=\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{qj}$, $P^{\alpha}=\prod_{q=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}p_{qj}^{\alpha_{qj}}$. Подставляя в (10), находим

$$\sum_{|\alpha|\geq 0,|\beta|>0}|\beta|c_{\alpha,\beta}P^{\alpha}\overline{P}^{\beta}=0,$$

откуда $c_{\alpha,\beta}=0$ для всех $|\beta|>0$. Следовательно, $F(P)$ не зависит от $\overline{P}$, то есть F голоморфна в B_{mn}^3. Из (7) и леммы 2 вытекает, что $F\in H^p(\mathrm{B}_{mn}^3)$. Согласно свойствам интеграла Пуассона ([8, 9]), f является радиальным граничным значением F почти всюду на X_{mn}^3:

$$\lim_{r\to 1-0}F(r\zeta)=f(\zeta).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие. Если функция $f\in L^p(\mathrm{X}_{mn}^3)$, $(p\geq 1)$ голоморфно (по t) продолжается в аналитические диски

$$\Delta_{\psi}=\{\zeta:\zeta=\psi(t\lambda),|t|<1\}$$

для всех автоморфизмов ψ матричного шара B_{mn}^3 (либо для всех автоморфизмов, переводящих начало координат в точки некоторого фиксированного открытого множества $V\subset \mathrm{B}_{mn}^3$) до функций класса $H^p(\Delta_{\psi})$, то функция f голоморфно продолжается в B_{mn}^3.

Заключение. *В работе устанавливается аналог многомерной граничной теоремы Морера для матричного шара третьего типа области, образованной векторами симметрических матриц. В отличие от известного результата для непрерывных функций, здесь рассматриваются интегрируемые функции класса* L^p.

Список использованной литературы:

(1). Khudayberganov G., Rakhmonov U.S., Otemuratov B. Boundary Morera theorem for the matrix ball of the third type. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2018, vol. 11, № 1, p. 40–45.

(2). Худайберганов Г., Хидиров Б.Б., Рахмонов У.С. Автоморфизмы матричных шаров. Вестник НУУз., 2010, № 4. с. 205–209.

(3). Рахмонов У.С. Ядро Пуассона для матричного шара третьего типа. “Узбекский математический журнал”, 2012, № 3, с. 123–125.

(4). Nagel A., Rudin W. Moebius-invariant function spaces on balls and spheres. Duke Math. J. 1976, V. 43, p. 841–865.

(5). Косбергенов С. О граничной теореме Морера для шара и поликруга. Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск, КрасГУ, 1998, с. 59–65.

(6). Косбергенов С., Кытманов А.М., Мысливец С.Г. О граничной теореме Морера для классических областей. "Сибирский математический журнал", 1999, т. 40, № 3, с. 595–604.

(7). Косбергенов С. О многомерной граничной теореме Мореры для матричного шара. Известия вузов. Математика, 2001, № 4 (467), с. 28–32.

(8). Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Комплексный анализ в матричных областях. Красноярск, Сибирский федеральный университет, 2011, 290 с.

(9). Хуа Локен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. Москва, ИЛ, 1959.

Eshdavlatova Sevara Eshmamatovna (Toshkent shahridagi Belarus-O'zbekiston qo'shma tarmoqlararo amaliy texnik kvalifikatsiyalar instituti tayanch doktoranti; e-mail: sevaraeshdavlatova@gmail.com),
Akhmedova Qunduz Samatovna (O'zbekiston Milliy universiteti "Amaliy matematika va kompyuter tahlili" kafedrasi katta o'qituvchisi; e-mail: qunduzakhmedova6@gmail.com)

FRAKTAL-KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR YORDAMIDA KORRUPSIYA DINAMIKASINI MATEMATIK TADQIQ QILISH

Annotatsiya. *Maqolada korrupsiya jarayonini xotira effekti va ijtimoiy muhitdagi notekis ta'sirlarni hisobga olgan holda ifodalovchi fraktal-kasr tartibli matematik model taklif qilinadi. Modelda korrupsiya intensivligi, institutsional nazorat va jamoatchilik shaffofligi o'zaro bog'langan o'zgaruvchilar sifatida qaraladi. Natijalar korrupsiyaga qarshi siyosatda nazorat, shaffoflik va xotira parametrlarining rolini izohlash imkonini beradi.*

Kalit so'zlar: *fraktal-kasr hosila, korrupsiya dinamikasi, matematik model, Caputo operatori, barqarorlik.*

Эшдавлатова Севара Эшмаматовна (Базовый докторант совместного белорусско-узбекского межотраслевого института прикладных технических квалификаций; e-mail: sevaraeshdavlatova@gmail.com),
Ахмедова Кундуз Саматовна (Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и компьютерный анализ» Национального университета Узбекистана; e-mail: qunduzakhmedova6@gmail.com)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОРРУПЦИИ С ПОМОЩЬЮ ФРАКТАЛЬНО-ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. *В статье построена фрактально-дробная математическая модель динамики коррупции с учетом эффекта памяти и неоднородности социальной среды. Коррупционная активность, институциональный контроль и общественная прозрачность рассматриваются как взаимосвязанные переменные. Полученные результаты показывают стабилизирующее влияние контроля и прозрачности.*

Ключевые слова: *фрактально-дробная производная, динамика коррупции, математическая модель, оператор Капуто, устойчивость.*

Eshdavlatova Sevara Eshmamatovna (Basic doctoral of the Belarussian-Uzbek Institute of joint intersectoral practical technical qualifications; e-mail: sevaraeshdavlatova@gmail.com),
Akhmedova Qunduz Samatovna Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Computer Analysis, National University of Uzbekistan. e-mail: qunduzakhmedova6@gmail.com)

MATHEMATICAL INVESTIGATION OF CORRUPTION DYNAMICS USING FRACTAL-FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Annotation. *This article develops a fractal-fractional differential model for corruption dynamics under memory effects and heterogeneous social influence. Corruption activity, institutional control and public transparency are considered as mutually connected dynamic variables. The methodology is based on a Caputo-type fractal-fractional operator, positivity of solutions, equilibrium analysis and a local stability condition. The proposed model is theoretical and can be extended to empirical data after parameter identification.*

Keywords: *fractal-fractional derivative, corruption dynamics, mathematical model, Caputo operator, stability, transparency.*