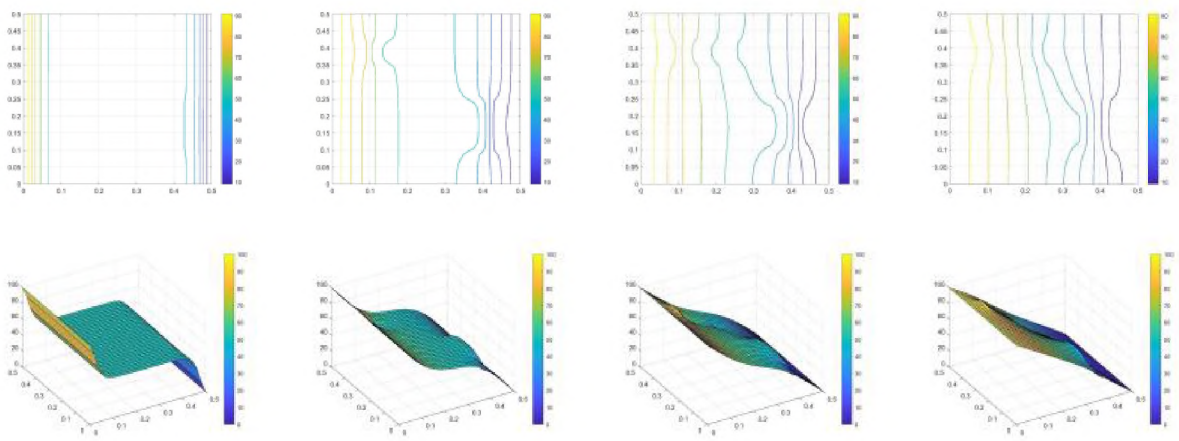


5-rasm. t = 10, 50, 100 va 600 sekunddagi izolinyalar va temperatura sirtlari.

Xulosa va takliflar. Ikkita qoplamani o‘z ichiga olgan plastinada issiqlik uzatish jarayoni o‘rganildi. Masalani yechish algoritmining to‘g‘riligi to‘r usuli bilan olingan sonli qiymatlarni taqqoslash orqali isbotlanadi. Qo‘shimchalarning bir jinsli bo‘lmagan temperaturali maydon hosil bo‘lishiga ta’siri o‘rganildi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

[1]. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М., Едиториал УРСС, 2003, 784 с.

[2]. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. Томск, изд-во ТПУ, 2007, 172 с.

[3]. Жуков Н.П., Майникова Н.Ф., Никулин С.С., Антонов О.А. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов. Тамбов, изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014, 80 с.

[4]. Люкшин П.Л., Люкшин R.A., Матолыгина Н.Ю., Панин С.В. Определение эффективных теплофизических характеристик композиционного материала. Физическая мезомеханика, 11 5 (2008), 103–110 с.

Хасанов Музаффар Машарипович, Дониёр Бахромович Азимов, Исмаилов Охунжон Бахромович (Ургенчский государственный университет; e-mail: hmuzaffar@mail.ru; doniyor.azimov.97@bk.ru; bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. *В работе рассматривается решение задачи Коши для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза (мНКдФ) с добавлением источника в классе периодических функций. Исследуются условия существования и единственности решений, а также поведение решений с течением времени. Используются методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется влиянию источника на динамику решения, включая формирование периодических волн и устойчивость полученных решений. Полученные результаты могут быть применимы к моделированию различных физических процессов, таких как распространение волн в плазме и гидродинамике.*

Ключевые слова*: модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, самосогласованный источник, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

DAVRIY FUNKSIYALAR SINFIDA MOSLANGAN MANBALI NOCHIZIQLI MODIFITSIRLANGAN KORTEVEG-DE FRIZ TENGLAMASI UCHUN QO‘YILGAN KOSHI MASALASINI YECHISH

Annotatsiya. *Mazkur ishda Korteveg-de Frizning modifikatsiyalangan nochizili tenglamasi (mKdV) uchun qo‘shimcha manba bilan birga Koshining masalasi davriy funksiyalar sinfida yechilishi ko‘rib chiqiladi. Yechimlarning mavjudligi va yagona bo‘lish shartlari hamda vaqt o‘tishi bilan ularning o‘zini tutishi o‘rganiladi. Funksional tahlil va differensial tenglamalar nazariyasi usullari qo‘llaniladi. Manbaning yechim dinamikasiga, xususan, davriy to‘lqinlarning shakllanishi va olingan yechimlarning barqarorligiga*

ta'siri alohida e'tibor bilan o'rganiladi. Olingan natijalar plazmadagi va gidrodinamikadagi to'lqinlarning tarqalishini modellashtirish kabi turli fizik jarayonlarga tatbiq etilishi mumkin.

***Kalit sozlari**: Korteveg-de Frizning modifikatsiyalangan tenglamasi, o'z-o'zidan muvozanatlashgan manba, Dirak operatori, teskari spektral masala, Dubrovin tenglamalar tizimi, izlar formulasi.*

SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR THE NONLINEAR MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH A SOURCE IN THE CLASS OF PERIODIC FUNCTIONS

***Annotation.** The paper examines the solution of the Cauchy problem for the modified nonlinear Korteweg-de Vries (mKdV) equation with an added source in the class of periodic functions. The conditions for the existence and uniqueness of solutions, as well as the behavior of solutions over time, are studied. Methods of functional analysis and the theory of differential equations are employed. Particular attention is given to the influence of the source on the solution dynamics, including the formation of periodic waves and the stability of the obtained solutions. The results can be applied to modeling various physical processes, such as wave propagation in plasma and hydrodynamics.*

***Key words**: Modified Korteweg-de Vries equation, self-consistent source, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin's system of equations, trace formulas.*

1. Введение. Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющей большое прикладное значение, является модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые была установлена в работе М.Вадати ([1]). Исследованию уравнения мКдФ в классе конечнозонных функций посвящены работы [2,3].

В работе [4] В.К.Мельникова с помощью метода обратной задачи рассеяния было проинтегрировано уравнение КдФ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций.

В настоящей работе изучается уравнение мКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций. Следует отметить, что уравнение мКдФ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций, было рассмотрено в работе [5], а нелинейные уравнения с самосогласованным источником, в классе периодических функций, в различных постановках изучались в работах [6-8].

Рассмотрим следующее модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником

$$u_t = 6|u|^2 u_x - u_{xxx} + \int_{-\infty}^{\infty} i\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+ - i\psi_2^+)(\psi_1^- - i\psi_2^-)d\lambda,\ t>0,\ x\in R^1 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

в классе комплексно-значных π –периодических по x функций:

$$u(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \tag{3}$$

Здесь $\beta(\lambda,t)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\beta(\lambda,t) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\ \lambda\to\pm\infty,$$

$\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y,\ \ x\in R^1, \tag{4}$$

где

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \Omega(x,t)=\begin{pmatrix}p(x,t) & q(x,t)\\ q(x,t) & -p(x,t)\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},$$

$$p(x,t) = -\mathrm{Re}(u(x,t)),\ q(x,t) = \mathrm{Im}(u(x,t)).$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t), s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$.

Цель данной работы дать процедуру построения решения $(u(x,t), \psi^+(x,\lambda,t), \psi^-(x,\lambda,t)$) задачи (1)-(4), в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (4).

2. Необходимые сведения о прямой и обратной спектральной задаче для оператора Дирака с периодическим коэффициентом. В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическими коэффициентами (20–22).

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in R^1, \qquad (5)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные непрерывные функции из класса $C^1(R)$, имеющие период π, а λ комплексный параметр.

Обозначим через $c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ и $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ решения уравнения (5) удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda) = (0,1)^T$.

Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (5). Следующее утверждение составляет содержание теоремы Флоке: при $\Delta^2(\lambda) - 4 \neq 0$, уравнение (5) имеет два линейно независимых решения, имеющие вид: $\psi^{\pm}(x,\lambda) = \rho_{\pm}^{\frac{x}{\pi}} \cdot p^{\pm}(x,\lambda)$, где $p^{\pm}(x,\lambda)$ -π-периодические вектор-функции по x, и $\rho_{\pm} = (\Delta(\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4})/2$; при $\Delta(\lambda) = 2$, уравнение (5) имеет решение с периодом π; при $\Delta(\lambda) = -2$, уравнение (5) имеет решение с антипериодом π. Если положить $\psi_1^{\pm}(0,\lambda) = 1$, то

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)} s(x,\lambda).$$

Эти решения принято называть решениями Флоке. Спектр оператора (5) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R^1 :\ -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\} = R^1 \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами. Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda) = 0$ обозначим через ξ_n, $n \in Z$. Числа ξ_n, $n \in Z$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле

$$y_1(0) = 0,\ y_1(\pi) = 0$$

для системы (5) и выполняются соотношения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$.

Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ и знаки $\sigma_n = sign\{s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (5). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in Z$ и границы спектра λ_n, $n \in Z$ называются спектральными данными задачи (5). Нахождение спек-

тральных данных задачи (5) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (5) вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times$$

$$\times [2\xi_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k)] \times \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \; n \in Z.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$- меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина, а также следующие формулы следов

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau)\right),$$

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau) - \xi_n(\tau))^2}}$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

При изучении обратной задачи также используется следующая формула второго следа

$$q^2(\tau) + q'(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau)\right).$$

В работе [11], используя систему уравнений Дубровина и формулы следов, доказаны следующие две теоремы, связывающие убывание длин лакун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений Дирака (5).

Теорема 1. Если $p(x)$, $q(x)$ π-периодические действительные функции из класса $C^2(-\infty, \infty)$ и длины лакун $\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$ экспоненциально убывают, т.е. если существуют постоянные числа $a > 0, b > 0$, для которых $\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} < ae^{-b|n|}$, при любых целых n, то $p(x)$ и $q(x)$ являются действительными аналитическими функциями на всей прямой.

Теорема 2. Если $p(x)$ и $q(x)$ действительные аналитические π-периодические функции, то длины лакун $\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$ убывают экспоненциально.

В работе [12] доказан следующий аналог обратной теоремы Борга в случае оператора Дирака.

Теорема 3. Для того чтобы число $\frac{\pi}{2}$ являлось периодом коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений (5), необходима и достаточна двукратность всех собственных значений антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi)$) для системы (5).

Покажем равномерную сходимость интеграла участвующего в уравнении (1). Для этого воспользуемся тождествами

$$s_1(\pi,\lambda,t)[\psi_1^+(\tau,\lambda,t)\psi_2^-(\tau,\lambda,t) + \psi_1^-(\tau,\lambda,t)\psi_2^+(\tau,\lambda,t)] = s_2(\pi,\lambda,t,\tau) - c_1(\pi,\lambda,t,\tau),$$

$$s_1(\pi,\lambda,t)[\psi_1^+(\tau,\lambda,t)\psi_1^-(\tau,\lambda,t)-\psi_2^-(\tau,\lambda,t)\psi_2^+(\tau,\lambda,t)]=s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau),\quad (6)$$

где $c(x,\lambda,t,\tau)$ и $s(x,\lambda,t,\tau)$ –решения системы Дирака с коэффициентами $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$, удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda,t,\tau)=1$, $c'(0,\lambda,t,\tau)=0$ и $s(0,\lambda,t,\tau)=0$, $s'(0,\lambda,t,\tau)=1$.

Из асимптотических формул

$$c(x,\lambda,t,\tau)=\begin{pmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{pmatrix}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \lambda\to\pm\infty,$$

$$s(x,\lambda,t,\tau)=\begin{pmatrix}-\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{pmatrix}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \lambda\to\pm\infty$$

следуют оценки

$$s_2(\pi,\lambda,t,\tau)-c_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\text{ при }\lambda\to\pm\infty.$$

Эти оценки и равенство (6) обеспечивают равномерную сходимость интеграла, участвующего в уравнении (1).

3. Эволюция спектральных параметров. Теорема 4. Пусть $(u(x,t),\psi^+(x,\lambda,t),$ $\psi^-(x,\lambda,t))$ является решением задачи (1)-(4). Тогда спектр уравнения (4) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n\in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(t)=2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\times$$

$$\times\{p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-2(p(0,t)+\xi_n)[q^2(0,t)+q_x(0,t)+p^2(0,t)]-$$

$$-4\xi_n^2(p(0,t)+\xi_n)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\},\quad (7)$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}.$$

Знаки $\sigma_n(t)=\pm1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)\big|_{t=0}=\xi_n^0,\quad \sigma_n(t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0,\quad n\in Z,$$

где ξ_n^0,σ_n^0, $n\in Z$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x)=-\mathrm{Re}(u_0(x))$ и $q_0(x)=\mathrm{Im}(u_0(x))$.

Доказательство. Учитывая равенство $u(x,t)=-p(x,t)+iq(x,t)$ и введя обозначения

$$G_1(x,t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^-+\psi_2^+\psi_1^-)d\lambda$$

и

$$G_2(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda$$

уравнение (1) перепишем в виде следующей системы:

$$\begin{cases} p_t = 6(p^2+q^2)p_x - p_{xxx} + G_1 \\ q_t = 6(p^2+q^2)q_x - q_{xxx} + G_2. \end{cases} \tag{8}$$

Обозначим через $\xi_n(t),\ n\in Z$ собственные значения задачи Дирихле

$$y_1(0)=0,\ y_1(\pi)=0 \tag{9}$$

для уравнения (4).

Пусть $y_n(x,t)=\begin{pmatrix} y_{n,1}(x,t) \\ y_{n,2}(x,t)\end{pmatrix},\ n\in Z$ ортонормированные собственные вектор-функции задачи Дирихле (4), (9), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t),\ n\in Z$. Не ограничивая общность, можно считать собственные вектор-функции $y_n(x,t),\ n\in Z$ действительно-значными.

Дифференцируя по t равенство $\xi_n(t)=(L(t)y_n,y_n)$ и пользуясь симметричностью оператора $L(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \dot\xi_n(t) &= (\dot\Omega(x,t)y_n + L(t)\dot y_n, y_n) + (L(t)y_n,\dot y_n) = \\ &= (\dot\Omega(x,t)y_n, y_n) + (\dot y_n, L(t)y_n) + (L(t)y_n,\dot y_n) = \\ &= (\dot\Omega(x,t)y_n, y_n) + \xi_n(t)((y_n,y_n))^{\cdot} = (\dot\Omega(x,t)y_n, y_n). \end{aligned} \tag{10}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z)=\int_0^\pi [y_1(x)\overline{z}_1(x)+y_2(x)\overline{z}_2(x)]dx,\quad y=\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},\ z=\begin{pmatrix} z_1(x)\\ z_2(x)\end{pmatrix},$$

равенство (10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot\xi_n(t) &= \int_0^\pi [(p_t y_{n,1} + q_t y_{n,2})y_{n,1} + (q_t y_{n,1} - p_t y_{n,2})y_{n,2}]dx = \\ &= \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)p_t + 2y_{n,1}y_{n,2}\,q_t]dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (8) в (11), находим

$$\begin{aligned} \dot\xi_n(t) = \int_0^\pi 6(p^2+q^2)(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)p_x dx + 12\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}(p^2+q^2)\cdot q_x dx - \\ - \int_0^\pi (y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)p_{xxx}dx - 2\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_{xxx}dx + \\ + \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)G_1 + 2y_{n,1}y_{n,2}\cdot G_2]dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Преобразуем первый и второй интеграл в равенстве (12):

$$I_1 = \int_0^\pi 6(p^2+q^2)(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)dp + 12\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}(p^2+q^2)dq. \tag{13}$$

Интегрируя по частям в равенстве (13), имеем

$$I_1 = 6p(0,t)(p^2(0,t)+q^2(0,t))(y_{n,2}^2(0,t)-y_{n,2}^2(\pi,t)) -$$

$$-12\int_0^\pi p\cdot(y_{n,1}y'_{n,1}-y_{n,2}y'_{n,2})(p^2+q^2)dx - 6\int_0^\pi p\cdot(y_{n,1}^2-y_{n,2}^2)d(p^2+q^2) -$$

$$-12\int_0^\pi q\cdot(y_{n,1}y'_{n,2}+y_{n,2}y'_{n,1})(p^2+q^2)dx - 12\int_0^\pi q\cdot y_{n,1}y_{n,2}d(p^2+q^2),$$

$$I_1 = 6p(0,t)(p^2(0,t)+q^2(0,t))(y_{n,2}^2(0,t)-y_{n,2}^2(\pi,t)) -$$

$$-12\int_0^\pi [y'_{n,1}(p\,y_{n,1}+q\,y_{n,2})+y'_{n,2}(q\,y_{n,1}-p\,y_{n,2})](p^2+q^2)dx -$$

$$-6\int_0^\pi (y_{n,1}(p\,y_{n,1}+q\,y_{n,2})+y_{n,2}(q\,y_{n,1}-p\,y_{n,2}))d(p^2+q^2).$$

Из уравнения (4) следует следующее равенство

$$\begin{cases} y'_{n,1}+\xi_n y_{n,2} = q\,y_{n,1}-p\,y_{n,2} \\ \xi_n y_{n,1}-y'_{n,2} = p\,y_{n,1}+q\,y_{n,2}\,. \end{cases} \tag{14}$$

Используя эти тождества, получим

$$I_1 = 6p(0,t)(p^2(0,t)+q^2(0,t))(y_{n,2}^2(0,t)-y_{n,2}^2(\pi,t)) -$$

$$-12\xi_n\int_0^\pi (y'_{n,1}y_{n,1}+y'_{n,2}y_{n,2})(p^2+q^2)dx - 6\xi_n\int_0^\pi (y_{n,1}^2+y_{n,2}^2)d(p^2+q^2) -$$

$$-6\int_0^\pi (y'_{n,1}y_{n,2}-y_{n,1}y'_{n,2})d(p^2+q^2),$$

$$I_1 = 6(p(0,t)+\xi_n)(p^2(0,t)+q^2(0,t))(y_{n,2}^2(0,t)-y_{n,2}^2(\pi,t)) -$$

$$-6\int_0^\pi (y'_{n,1}y_{n,2}-y_{n,1}y'_{n,2})d(p^2+q^2). \tag{15}$$

Теперь рассмотрим третий и четвертый интеграл в равенстве (12):

$$I_2 = -\int_0^\pi (y_{n,1}^2-y_{n,2}^2)dp_{xx} - \int_0^\pi 2y_{n,1}y_{n,2}dq_{xx} =$$

$$= p_{xx}(0,t)(y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)) +$$

$$+\int_0^\pi 2(y_{n,1}y'_{n,1}-y_{n,2}y'_{n,2})p_{xx}dx + \int_0^\pi 2(y'_{n,1}y_{n,2}+y_{n,1}y'_{n,2})q_{xx}dx =$$

$$= p_{xx}(0,t)(y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)) +$$

$$+2\int_0^\pi [q\cdot(y_{n,1}^2+y_{n,2}^2)-2\xi_n y_{n,1}y_{n,2}]dp_x + 2\int_0^\pi (-p\cdot(y_{n,1}^2+y_{n,2}^2)+\xi_n(y_{n,1}^2-y_{n,2}^2))dq_x =$$

$$= [p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-2(p(0,t)+\xi_n)q_x(0,t)](y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)) -$$

$$-2\int_0^\pi p_x[q_x\cdot(y_{n,1}^2+y_{n,2}^2)+2q\cdot(y_{n,1}y'_{n,1}+y_{n,2}y'_{n,2})-2\xi_n(y'_{n,1}y_{n,2}+y_{n,1}y'_{n,2})]dx -$$

$$-2\int_0^{\pi} q_x[-p_x\cdot(y_{n,1}^2+y_{n,2}^2)-2p\cdot(y_{n,1}y'_{n,1}+y_{n,2}y'_{n,2})+2\xi_n(y'_{n,1}y_{n,1}-y_{n,2}y'_{n,2})]dx=$$

$$=[p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-2(p(0,t)+\xi_n)q_x(0,t)](y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t))-$$

$$-4\int_0^{\pi}(p_xq-pq_x)\cdot(y_{n,1}y'_{n,1}+y_{n,2}y'_{n,2})dx-$$

$$-4\int_0^{\pi}\{-p_x\cdot[(\xi_ny_{n,2})y'_{n,1}+(\xi_ny_{n,1})y'_{n,2}]+q_x[(\xi_ny_{n,1})y'_{n,1}-(\xi_ny_{n,2})y'_{n,2}]\}dx=$$

$$=[p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-2(p(0,t)+\xi_n)q_x(0,t)](y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t))-$$

$$-4\int_0^{\pi}(p_xq-pq_x)\cdot(y_{n,1}y'_{n,1}+y_{n,2}y'_{n,2})dx+$$

$$+4\int_0^{\pi}\{p_x\cdot[(\xi_ny_{n,2})y'_{n,1}+(\xi_ny_{n,1})y'_{n,2}]-q_x[(\xi_ny_{n,1})y'_{n,1}-(\xi_ny_{n,2})y'_{n,2}]\}dx.$$

Учитывая тождества (14), находим

$$I_2=[p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-2(p(0,t)+\xi_n)q_x(0,t)][y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)]-$$

$$-4\int_0^{\pi}(p_xq-pq_x)\cdot(y_{n,1}y'_{n,1}+y_{n,2}y'_{n,2})dx+$$

$$+4\int_0^{\pi}\{(p_xq-pq_x)\cdot(y_{n,1}y'_{n,1}+y_{n,2}y'_{n,2})+(pp_x+qq_x)\cdot(y_{n,1}y'_{n,2}-y_{n,2}y'_{n,1})\}dx+$$

$$+4\int_0^{\pi}\{p_x\cdot(y'^2_{n,2}-y'^2_{n,1})-2q_x\cdot y'_{n,1}y'_{n,2}\}dx=$$

$$=[p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-2(p(0,t)+\xi_n)q_x(0,t)][y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)]-$$

$$-2\int_0^{\pi}(y_{n,2}y'_{n,1}-y_{n,1}y'_{n,2})d(p^2+q^2)+$$

$$+4\int_0^{\pi}\{p_x\cdot(y'^2_{n,2}-y'^2_{n,1})-2q_x\cdot y'_{n,1}y'_{n,2}\}dx. \qquad (16)$$

Преобразуем последний интеграл в равенстве (16):

$$A_1=4\int_0^{\pi}(y'^2_{n,2}-y'^2_{n,1})dp-8\int_0^{\pi}y'_{n,2}y'_{n,1}dq=$$

$$=4p(0,t)\{[y'^2_{n,2}(\pi,t)-y'^2_{n,2}(0,t)]-[y'^2_{n,1}(\pi,t)-y'^2_{n,1}(0,t)]\}-$$

$$-8q(0,t)[y'_{n,1}(\pi,t)y'_{n,2}(\pi,t)-y'_{n,1}(0,t)y'_{n,2}(0,t)]-$$

$$-8\int_0^{\pi}\{p\cdot(y'_{n,2}y''_{n,2}-y'_{n,1}y''_{n,1})-q\cdot(y'_{n,1}y''_{n,2}+y'_{n,2}y''_{n,1})\}dx. \qquad (17)$$

Теперь рассмотрим следующий интеграл:

$$A_2=8\int_0^{\pi}\{p\cdot(y'_{n,1}y''_{n,1}-y'_{n,2}y''_{n,2})+q\cdot(y'_{n,1}y''_{n,2}+y'_{n,2}y''_{n,1})\}dx=$$

$$= 8\int_0^{\pi}\{(py'_{n,1}+qy'_{n,2})y''_{n,1}+(qy'_{n,1}-py'_{n,2})y''_{n,2}\}dx =$$

$$= 8\int_0^{\pi}\{[-(p^2+q^2)y_{n,2}+\xi_n y'_{n,1}+\xi_n^2 y_{n,2}]y''_{n,1}+[(p^2+q^2)y_{n,1}+\xi_n y'_{n,2}-\xi_n^2 y_{n,1}]y''_{n,2}\}dx =$$

$$= 8\int_0^{\pi}\{(p^2+q^2-\xi_n^2)(y_{n,1}y''_{n,2}-y_{n,2}y''_{n,1})+\xi_n(y'_{n,1}y''_{n,1}+y'_{n,2}y''_{n,2})\}dx =$$

$$= 8\int_0^{\pi}(p^2+q^2-\xi_n^2)(y_{n,1}y'_{n,2}-y_{n,2}y'_{n,1})'dx + 4\xi_n\int_0^{\pi}(y'^2_{n,1}+y'^2_{n,2})'dx =$$

$$= -8[p^2(0,t)+q^2(0,t)-\xi_n^2][y_{n,2}(\pi,t)y'_{n,1}(\pi,t)-y_{n,2}(0,t)y'_{n,1}(0,t)]-$$

$$-8\int_0^{\pi}(y_{n,1}y'_{n,2}-y_{n,2}y'_{n,1})d(p^2+q^2)+$$

$$+4\xi_n[y'^2_{n,1}(\pi,t)-y'^2_{n,1}(0,t)]+4\xi_n[y'^2_{n,2}(\pi,t)-y'^2_{n,2}(0,t)]. \qquad (18)$$

Подставляя выражение (18) в равенство (17), имеем

$$A_1 = 4(p(0,t)+\xi_n)[y'^2_{n,2}(\pi,t)-y'^2_{n,2}(0,t)]-4(p(0,t)-\xi_n)[y'^2_{n,1}(\pi,t)-y'^2_{n,1}(0,t)]-$$
$$-8q(0,t)[y'_{n,1}(\pi,t)y'_{n,2}(\pi,t)-y'_{n,1}(0,t)y'_{n,2}(0,t)]-$$
$$-8[p^2(0,t)+q^2(0,t)-\xi_n^2][y_{n,2}(\pi,t)y'_{n,1}(\pi,t)-y_{n,2}(0,t)y'_{n,1}(0,t)]-$$
$$-8\int_0^{\pi}(y_{n,1}y'_{n,2}-y_{n,2}y'_{n,1})d(p^2+q^2). \qquad (19)$$

Используя равенства (14), получим

$$A_1 = [y^2_{n,2}(\pi,t)-y^2_{n,2}(0,t)]\{4(p(0,t)+\xi_n)q^2(0,t)-4(p(0,t)-\xi_n)(p(0,t)+\xi_n)^2-$$
$$-8q^2(0,t)(p(0,t)+\xi_n)+8[p^2(0,t)+q^2(0,t)-\xi_n^2](p(0,t)+\xi_n)\}+$$
$$+8\int_0^{\pi}(y_{n,2}y'_{n,1}-y_{n,1}y'_{n,2})d(p^2+q^2). \qquad (20)$$

Из (16) и (20) выводим, что

$$I_2 = [y^2_{n,2}(\pi,t)-y^2_{n,2}(0,t)]\{p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-2(p(0,t)+\xi_n)q_x(0,t)+$$
$$+4(p(0,t)+\xi_n)q^2(0,t)-4(p(0,t)-\xi_n)(p(0,t)+\xi_n)^2-$$
$$-8q^2(0,t)(p(0,t)+\xi_n)+8[p^2(0,t)+q^2(0,t)-\xi_n^2](p(0,t)+\xi_n)\}+$$
$$+6\int_0^{\pi}(y_{n,2}y'_{n,1}-y_{n,1}y'_{n,2})d(p^2+q^2). \qquad (21)$$

Следовательно, из (15) и (21) следует, что

$$I_1+I_2 = [y^2_{n,2}(\pi,t)-y^2_{n,2}(0,t)]\{p_{xx}(0,t)+2p_x(0,t)q(0,t)-$$
$$-2(p(0,t)+\xi_n)[q_x(0,t)+q^2(0,t)+p^2(0,t)]-4\xi_n^2(p(0,t)+\xi_n)\}. \qquad (22)$$

Теперь вычислим пятый интеграл в равенстве (12):

$$I_3 = \int_0^{\pi}[(y^2_{n,1}-y^2_{n,2})G_1+2y_{n,1}y_{n,2}\cdot G_2]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t) \{ \int_0^{\pi} [-(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(\psi_1^+ \psi_2^- + \psi_2^+ \psi_1^-) +$$

$$+ 2 y_{n,1} y_{n,2} (\psi_1^+ \psi_1^- - \psi_2^+ \psi_2^-)] dx \} d\lambda . \qquad (23)$$

Нетрудно видеть, что

$$J = \int_0^{\pi} [-(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(\psi_1^+ \psi_2^- + \psi_2^+ \psi_1^-) + 2 y_{n,1} y_{n,2} (\psi_1^+ \psi_1^- - \psi_2^+ \psi_2^-)] dx =$$

$$= -\int_0^{\pi} [(y_{1,n} \cdot \psi_1^+ + y_{2,n} \cdot \psi_2^+) \cdot (y_{1,n} \cdot \psi_2^- - y_{2,n} \cdot \psi_1^-) +$$

$$+ (y_{1,n} \cdot \psi_1^- + y_{2,n} \cdot \psi_2^-) \cdot (y_{1,n} \cdot \psi_2^+ - y_{2,n} \cdot \psi_1^+)] dx .$$

Пользуясь тождеством

$$(y_{1,n} \cdot \psi_2^{\pm} - y_{2,n} \cdot \psi_1^{\pm})' = (\lambda - \xi_n)(y_{1,n} \cdot \psi_1^{\pm} + y_{2,n} \cdot \psi_2^{\pm}),$$

получим

$$J = \frac{1}{\xi_n - \lambda} \cdot [y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)] . \qquad (24)$$

Подставляя выражение (24) в (23), имеем

$$I_3 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\} \cdot [y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)] . \qquad (25)$$

Из (12), (22) и (25) выводим, что

$$\dot{\xi}_n(t) = [y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)] \times \{ p_{xx}(0,t) + 2 p_x(0,t) q(0,t) -$$

$$- 2(p(0,t) + \xi_n)[q^2(0,t) + q_x(0,t) + p^2(0,t)] -$$

$$-4\xi_n^2 (p(0,t) + \xi_n) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \} . \qquad (26)$$

Из равенства

$$\int_0^{\pi} [s_1^2(x,\lambda,t) + s_2^2(x,\lambda,t)] dx = s_1(\pi,\lambda,t) \cdot \frac{\partial s_2(\pi,\lambda,t)}{\partial \lambda} - s_2(\pi,\lambda,t) \cdot \frac{\partial s_1(\pi,\lambda,t)}{\partial \lambda}$$

находим формулу для нормы собственной вектор-функции $s(x,\xi_n(t),t)$ задачи Дирихле (4)+(9), соответствующие собственному значению $\xi_n(t)$:

$$c_n^2(t) = \int_0^{\pi} [s_1^2(x,\xi_n(t),t) + s_2^2(x,\xi_n(t),t)] dx = -\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial \lambda} \cdot s_2(\pi,\xi_n(t),t) . \qquad (27)$$

Используя равенство

$$y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x,\xi_n(t),t)$$

и (27), имеем

$$y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t) = \frac{s_2^2(\pi,\xi_n(t),t) - 1}{c_n^2(t)} = -\frac{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - \dfrac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}}{\dfrac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial \lambda}} . \qquad (28)$$

Подставляя значения $x=\pi$ и $\lambda=\xi_n(t)$ в тождество

$$c_1(x,\lambda,t)s_2(x,\lambda,t)-c_2(x,\lambda,t)s_1(x,\lambda,t)=1,$$

находим

$$c_1(\pi,\xi_n(t),t)=\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}. \tag{29}$$

Учитывая равенство (29) и следующее тождество

$$[c_1(\pi,\lambda,t)-s_2(\pi,\lambda,t)]^2=(\Delta^2(\lambda)-4)-4c_2(\pi,\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t),$$

получим

$$s_2(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}=\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t))-4}, \tag{30}$$

где

$$\Delta(\lambda)=c_1(\pi,\lambda,t)+s_2(\pi,\lambda,t),\qquad \sigma_n(t)=sign\left\{s_2(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}\right\}.$$

Из (28) и (30) выводим равенство

$$y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)=-\frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t))-4}}{\dfrac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}. \tag{31}$$

Используя следующие разложения

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{a_k^2},\qquad s_1(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},$$

где $a_0=1$ и $a_k=k$ при $k\neq 0$, равенство (31) можем переписать в следующим в виде:

$$y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)=$$

$$=2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}. \tag{32}$$

При этом мы воспользовались и равенством

$$sign\left\{-\frac{\pi}{a_n}\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_k-\xi_n}{a_k}\right\}=(-1)^{n-1}.$$

Подставляя выражение (32) в тождество (26), выводим равенство (7).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими $y(\pi)=y(0)$ или антипериодическими $y(\pi)=-y(0)$ граничными условиями, то вместо уравнения (26) имеем $\dot{\lambda}_n=0$. Значит, собственные значения λ_n, $n\in Z$ периодической и антипериодической задачи не зависят от параметра t. **Теорема доказана.**

Следствие 1. Если мы вместо $p(x,t)$ и $q(x,t)$ рассмотрим $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ,t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ,t: $\xi_n=\xi_n(\tau,t),\ \ \sigma_n=\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$. В этом случае, система (7) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times$$

$$\times \{p_{xx}(\tau,t) + 2p_x(\tau,t)q(\tau,t) - 2(p(\tau,t) + \xi_n)[q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) + p^2(\tau,t)] -$$

$$-4\xi_n^2(p(\tau,t) + \xi_n) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n - \lambda} d\lambda\}. \qquad (33)$$

Здесь

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{a_k}.$$

Учитывая формулы следов

$$p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right), \qquad (34)$$

$$q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right)$$

$$p_{xx} + 2p_x q = -2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right)\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \tau}\right) -$$

$$-4\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^2(\xi)\xi_n - 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^2(\xi) -$$

$$-2\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\xi_n \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \tau},$$

систему (33) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Действительно, обозначим через λ_n, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \in Z$ спектральные данные задачи (4) соответствующие коэффициентам $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$. Найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$. Далее решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z$$

для системы уравнений Дубровина (33). После этого по формулам следов (34) и

$$q(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \qquad (35)$$

определяем $p(x,t)$ и $q(x,t)$. С их помощью построим решение задачи (1)-(4) $u(x,t) = -p(x,t) + iq(x,t)$. После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$.

Следствие 3 Используя результаты работы [11] выводим, что если начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими функциями, то и компоненты решения $p(x,t)$ и $q(x,t)$ являются действительными аналитическими функциями по x.

Следствие 4. Если число $\frac{\pi}{2}$ является периодом для начальной функции $u_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая ко-

эффициентам $p(x,t)$ и $q(x,t)$ совпадает с $\Delta(\lambda)$, то по обратной теореме Борга (см. [12]), число $\frac{\pi}{2}$ является также периодом и для решения $u(x,t)$ по переменной x.

Заключение. В данной работе исследовано решение задачи Коши для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в классе периодических функций. Проведен анализ существования и единственности решений, а также их поведения со временем. Установлено влияние источника на динамику формирования периодических волн и устойчивость решений. Полученные результаты расширяют понимание процессов, описываемых мНКдФ-уравнением с источником, и могут быть использованы в моделировании сложных физических явлений, таких как волновые процессы в плазме и гидродинамике.

Список использованной литературы:

(1). Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. J.Phys. Soc. Japan, 1972, v. 32, pp. 1681.

(2). Итс А.Р. Точное интегрирование в римановых θ-функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л., ЛГУ, 1977.

(3). Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Мат. сб., 1994, т. 185, № 8, с. 103–114.

(4). Melnikov V.K. Exact solutions of the Kortewed-de Vries equation with a self-consistent source. Phys. ett. A, 1988, v. 128, pp. 488–492.

(5). Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником. "Узб. матем. журнал", 2003, № 1, с. 69–75.

(6). Grinevich, P.G., Taimanov, I.A. Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 224, p. 125–138 (2008).

(7). Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. «Теорет. и матем. физика», 2010, т. 164, № 2, с. 214–221.

(8). Alisher Yakhshimuratov. The Nonlinear Schrödinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, (2011), 14, pp. 153–169.

(9). Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М., "Наука", 1988.

(10). Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1978, вып. 30, с. 90–101.

(11). Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом. "Узб. мат. журнал", 2001, № 3–4, с. 48–55.

(12). Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака. "Узб. мат. журнал", 2000, № 3, с. 40–46.

(13). Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials. Proceedings of the Edinburgh mathematical society, 2017, v. 60, p. 615–633.

Икрамов Ахмат Маорипович (Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека; ikramovaxmat@gmail.com)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛАХ

Аннотация. *В статье приводится математическая и вариационная постановка, вычислительный алгоритм и программное обеспечение решения трёхмерных стационарных задач теплопроводности. Исследуемая область трехмерного тела разбивается на линейные конечные элементы в форме тетраэдра с четырьмя узлами в углах. Рассматривается задача о влиянии включения из меди или изолированной полости в форме куба. Изучено влияние неоднородностей на распределение поля температуры в конструкции. Установлено, что наличии медного включения в центре конструкции, понижает температуру в верхней части тела, а в нижней - увеличивает. Наличие изолированной полости концентрирует тепло в окрестности, расположенной над полостью. Результаты вычислительных экспериментов для однородных классических тел соответствуют аналитическим решениям и численным решениям, полученным методом конечных разностей.*

Ключевые слова: *теплопроводность, стационарность, конечный элемент, узел, полость, включение.*