Xolyigitova Mohigul Naim qizi (Jizzax davlat Pedagogika universiteti o‘qituvchisi)

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI NAZARIYASIDAN BA’ZI MA’LUMOTLAR

Annotatsiya. *Ushbu maqolada differensial tenglamalar sistemasi nazariyasining asosiy tushunchalari va ularning amaliy qo‘llanilish jihatlari yoritiladi. Xususan, birinchi va yuqori tartibli differensial tenglamalar sistemalarining umumiy ko‘rinishi, ularning yechimlari mavjudligi va yagonaligi shartlari tahlil qilinadi. Shuningdek, chiziqli va nochiziqli sistemalar, ularning barqarorligi, fundamental yechimlar sistemasi hamda boshlang‘ich shartli masalalar ko‘rib chiqiladi. Matritsali usullar, xos son va xos vectorlar yordamida yechish metodlari haqida qisqacha ma’lumot beriladi.*

Kalit so‘zlar: *differensial tenglamalar sistemasi, chiziqli sistema, nochiziqli sistema, boshlang‘ich shart, barqarorlik, fundamental yechim, xos son, xos vektor, matritsa usuli, modellashtirish.*

Холигитова Мохигул Наим кизи (преподаватель (Джизакский государственный педагогический университет)

НЕКОТОРАЯ ИНФОРМАЦИЯ ИЗ ТЕОРИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. *В данной статье рассматриваются основные понятия теории систем дифференциальных уравнений и их практическое применение. В частности, анализируется общее появление систем дифференциальных уравнений первого и более высоких порядков, условия существования и единственности их решений. Также рассматриваются линейные и нелинейные системы, их устойчивость, фундаментальные решения систем и проблемы начальных условий. Кратко дается информация о матричных методах, методах решения с использованием собственных значений и собственных векторов.*

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, линейная система, нелинейная системма, начальное условие, устойчивость, фундаментальное решение, собственное значение, собственный вектор, матричный метод, моделирование.*

Kholyigitova Mohigul Naim kizi (Teacher, Jizzakh State Pedagogical University)

SOME INFORMATION FROM THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Annotation. *This article discusses some fundamental concepts of the theory of systems of differential equations and their practical applications. In particular, the general form of first- and higher-order systems, as well as the conditions for the existence and uniqueness of solutions, are analyzed. Linear and nonlinear systems, stability theory, fundamental systems of solutions, and initial value problems are also considered. Matrix methods, eigenvalues, and eigenvectors used in solving linear systems are briefly described.*

Keywords: *System of differential equations, linear system, nonlinear system, initial condition, stability, fundamental solution, eigenvalue, eigenvector, matrix method, mathematical modeling.*

Kirish. Zamonaviy matematikaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lgan differensial tenglamalar nazariyasi tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni modellashtirishda alohida o‘rin tutadi. Ayniqsa, differensial tenglamalar sistemasi bir nechta o‘zaro bog‘liq jarayonlarning dinamikasini ifodalashda keng qo‘llaniladi. Mexanika, fizika, biologiya, iqtisodiyot hamda texnika sohalarida yuz beradigan ko‘plab hodisalar aynan sistemali ko‘rinishdagi differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili. Differensial tenglamalar sistemasi nazariyasining rivojlanishida klassik ilmiy tadqiqotlar muhim o‘rin tutadi. Xususan, Y.A.Metropolskiyning asimptotik nazariyaga oid ishlari nochiziqli va nostatsionar tebranish jarayonlarini tahlil qilishda muhim metodologik asos yaratgan.

Shuningdek, S.F.Feshchenko, N.I.Shkil va L.D.Nikolenko tomonidan ishlab chiqilgan asimptotik metodlar chiziqli differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Zamonaviy tadqiqotlarda esa M.N.Xolyigitova va A.O.Suyarov tomonidan bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasini rezonans va norezonans holatlar uchun yechimlarini tuzish masalalari o‘rganilgan. Ushbu ishlar differensial tenglamalar sistemalarining amaliy yechimlarini aniqlashda muhim ilmiy natijalarni beradi.

Tadqiqot metodologiyasi. Qisqacha chiziqli differensial tenglamalarga doir ma`lumotlarga to‘xtalamiz. O‘zgaruvchi koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Ma`lumki, chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \qquad i = \overline{1, n},$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, uning vektor-matritsali ko‘rinishi

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

dan iborat, bunda $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, n-o‘lchovli vektor $A(t)$ (n×n) kvadrat matritsa.

(1) sistemaning koeffitsiyenti $a_{ij}(t)$ funksiyalar, hech bo‘lmaganda, $t \geq t_0$ lar uchun uzluksiz deb qaraymiz. U holda har qanday o‘zgarmas n-o‘lchovli $x_0=(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, vektor uchun (1) sistemaning yagona $x(t)= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ vektor yechimi mavjud bo‘lib, $t=t_0$ bo‘lganda, x_0 vektorga teng bo‘ladi. Bu yechimni $x(t, x_0, t_0)$ ko‘rinishda belgilaymiz. Ixtiyoriy o‘zgarmas

$$X_0=\| x_{i_j o} \|, \; i, j = \overline{1, n} \tag{2}$$

matritsani olamiz. U holda (2) matritsaning har bir j-chi ustuni $x_{ik0}\ \left(i = \overline{1, n}\right)$ uchun (1) sistemaning $x_j(t)$ vektor yechimi mavjud bo‘lib, $t=t_0$ bo‘lganda, x_{j_0} ga teng bo‘ladi va uni $x_j(t, t_0, x_{j_0})$ vektorlardan (n×n) tipidagi $X(t)$ matritsani tuzamiz. U holda $X(t)$ matritsaning har bir ustuni (1) sistemani qanoatlantiradi [1;71-b.]. Bu matritsaga (1) sistemaning integrali yoki matritsali yechimi deyiladi va

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) \tag{3}$$

ko‘rinishda yoziladi.

Agar $X(t)$ integral matritsa $t=t_0$ bo‘lganda, birlik matritsaga teng, ya’ni, $X(t)=E$ bo‘lsa, u holda unga (1) sistemaning normal integral matritsasi yoki normal matritsali yechimi deyiladi.

(1) sistemaning $X(t)$ matritsali yechimining ustunlari $t \geq t_0$da chiziqli bog‘lanmagan yoki $t \geq t_0$da $\det X(t) \neq 0$ bo‘lsa, bu yechimga sistemaning fundamental matritsali yechimi deyiladi.

Agar X(t) (1) sistemaning fundamental matritsali yechimi bo‘lsa, u holda har bir $x(t,t_0,x_0)$ vector yechimi $X(t)$ matritsa ustunlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$x=XC \tag{4}$$

vektorni qaraylik, bunda C, n-o‘lchovli o‘zgarmas vektor. U holda (1.4.3) ga asosan (4) vektor (1) sistemaning vektor yechimi bo‘ladi, ya’ni

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(XC)}{dt} = A(t)X(t)C = A(t)x(t).$$

Endi (4) tenglikdan (1) sistemaning har qanday vektor yechimi, shuningdek, $x(t,t_0,x_0)$ vector yechimini ham hosil qilish mumkinligini ko‘rsatamiz [2;43-b.]. Buning uchun (4)ga $t=t_0$, $x(t,t_0,x_0)=x_0$ ni qo‘yib,

$$x_0=X(t_0)C,$$

ni va bundan,

$$C=X^{-1}(t_0)\mathrm{x}_0 \tag{5}$$

ni hosil qilamiz. (5) ni (4) ga qo‘yib,

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0$$

vector yechimini aniqlaymiz. Yechimning yagonaligiga asosan, bu yechim $x(t,t_0,x_0)$ vector yechim bilan bir xil bo‘ladi [2;252-b.].

(4) vector yechimga (1) sistemaning umumiy vector yechimi, undan $C=X^{-1}(t_0)x_0$ hosil bo‘ladigan yechimga xususiy vector yechimi deyiladi.

n-tartibli determinantning hosilasi uchun

$$\frac{d}{dt}\left(\det X(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} \det \| x_{i1}(t), \dots, \frac{dx_{ij}}{dt} x_{ij+1}(t), \dots, x_{in}(t) \| \tag{6}$$

formula o‘rinli.

Agar X(t) (1) matritsali yechimi sistemaniki bo‘lsa, (6) dan uning determinanti uchun

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} spur X(\sigma) d\sigma \right) \tag{7}$$

formulani hosil qilamiz.

Bundan, agar $X(t)$ matritsali yechimning determinant, hech bo‘lmasa, bitta t_0 nuqtada nolga teng bo‘lmasa, har qanday $t>t_0$ uchun u nolga teng bo‘lmaydi, ya’ni, X(t), (1) sistemaning fundamental matritsali

yechimi bo‘ladi. Agar $x(t_0)$ sifatida x_0 boshlang‘ich holatdagi xos matritsani olsak, u holda (1) sistema $t = t_0$ bo‘lganda, x_0 ga teng bo‘lgan $X(t)$ fundamental matritsali yechimga ega bo‘ladi [4;193–204-b.].

Shunday qilib, $X(t_0)$ sifatida boshlang‘ich X_0 ga teng bo‘lgan xos matritsani olsak, u holda (1) sistema X(t) fundamental matritsali yechimga ega bo‘ladi.

Misol sifatida o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalarning

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{8}$$

sistemasini qaraymiz, bunda A, (n×n) tartibli o‘zgarmas matritsa. U holda

$$X(t)=e^{A\left(t-t_0\right)} \tag{9}$$

(8) sistemaning integral matritsali yechimi bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t-t_0)}\right)= Ae^{A(t-t_0)},$$

ya’ni $X(t_0)=E$ bo‘lgani va $X(t)$ matritsa (8) sistemani qanoatlantirgani uchun (7) ga asosan, har qanday $t\geq t_0$da $\det X\left(t\right)\neq 0$ bo‘ladi. Demak, (9) matritsali yechim (8) sistemaning fundamental matritsali yechimi ekan [5;413–416-b.].

Endi (9) matritsaning tuzilishini qaraymiz. Buning uchun quyidagi holga e’tiborni qarataylik.

Tahlil va natijalar. A matritsaning xos qiymatlariga mos keluvchi elementar bo‘luvchilari har xil. Bu hol uchun shunday xos B matritsa mavjudki,

$$A=B\Lambda B^{-1} \tag{10}$$

tenglik o‘rinli, bunda Λ diagonal matritsa:

$$\Lambda=diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \tag{11}$$

$\lambda_i \ \left(i=\overline{1,n}\right)$, A matritsaning xos qiymatlari. U holda,

$$X\left(t\right)= e^{B\Lambda B^{-1}} = Be^{\Lambda\left(t-t_0\right)}B^{-1} \tag{12}$$

$e^{\Lambda(t-t_0)}$ matritsa

$$e^{\Lambda(t-t_0)} = diag\left(e^{\lambda_1(t-t_0)}, e^{\lambda_2(t-t_0)},\ldots, e^{\lambda_n(t-t_0)}\right) \tag{13}$$

ko‘rinishga ega. Demak, X(t) normal fundamental matritsali-yechim (12), (13) ga asosan, (13) matritsa ustunlarining chiziqli kombinatsiyasini ifodalar ekan. Quyidagi teorema o‘rinli [4;193–204-b.].

Teorema. Agar A matritsaning xos qiymatlariga mos keluvchi hamda elementar bo‘luvchilari har xil va A matritsaning xos qiymatlari manfiy bo‘lsa, u holda $t \to +\infty$ bo‘lganda, (8) sistemaning hamma yechimlari nolga intiladi (asimptotik turg‘un). Agar $\mathrm{Re}\,\lambda_i \leq 0, \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$ bo‘lsa, u holda (8) sistemaning hamma yechimlari $t\geq t_0$ bo‘lganda chegaralangan bo‘ladi. A matritsaning xos qiymatlari ichida hech bo‘lmasa, bittasi musbat bo‘lsa, (1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lai [5;413–416-b.].

Xulosa va takliflar. Differensial tenglamalar sistemasi nazariyasi murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish va ularni chuqur tahlil qilish imkonini beruvchi muhim ilmiy yo‘nalish hisoblanadi. Sistemali yondashuv o‘zaro bog‘liq miqdorlar o‘rtasidagi dinamik munosabatlarni aniqlash va prognoz qilishda samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi.

Chiziqli bo‘lmagan sistemalarni o‘rganish esa yanada murakkabroq bo‘lib, zamonaviy matematik metodlar va sonli hisoblash usullarini talab etadi.

Umuman olganda, differensial tenglamalar sistemasi nazariyasining rivojlanishi ilm-fan va texnikaning ko‘plab sohalarida dolzarb masalalarni hal etishda muhim nazariy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Метропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., “Наука”, 1964, 432 с.

(2). Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К., “Наукова думка”, 1966, 252 с.

(3). Xolyigitova M.N., Suyarov A.O. Ta’lim jarayonida imkoniyati cheklangan o‘quvchilar bilan ishlashda zamo-naviy yondashuv. “Экономика и социум”, 2024, №.1 (128), 2025, с. 532–534.

(4). Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Мат.сб. н.с, 1948, 22, вып. 64, 193–204 с.

(5). Xolyigitova M.N., Suyarov A.O. Bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sitemasini “re–onans” va “rezonans” bo‘lmagan hollar uchun yechimlarini tuzish. “Экономика и социум”, 2024, №.10 (125), с. 413–416.