Xulosa. Ushbu maqolada davriy koeffitsiyentlarga ega vaznli Shturm-Liuvil tenglamasi uchun to‘g‘-ri va teskari masalalar usuldan foydalanib, qo‘shimcha hadli Kamassa-Holm tenglamasi uchun Koshi masalasi davriy funksiyalar sinfida yechildi. Differensial tenglamalarning Dubrovin sistemasiga o‘xshash analogi hosil qilindi. Olingan yechim bir jinsli yaqinlashuvchi funksional qator ko‘rinishida ifodalandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

[1]. Camassa R. and Holm D., An integrable shallow water equation with peaked solitons. Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 71, pp. 1661–1664.

[2]. Constantin A. A general-weighted Sturm-Liouville problem, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1997, 24, p. 767–782.

[3]. Constantin A. On the spectral problem for the periodic Camassa-Holm equation, J.Math. Anal. Appl., 1997, 210, p. 215–230.

[4]. Hasanov A.B., Babajanov B.A, Atajonov D.O. On the Integration of the Periodic Camassa-Holm Equation with a Self-Consistent Source, Journal of SibFU. Mathematics and Physics, 2022, 15(6), p. 785–796.

Islamova Mavluda Ikrambayevna (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universitetining Matematik modellashtirish, sonli usullar va dasturlar majmuyi ixtisosligi bo‘yicha 2-bosqich tayanch doktoranti)

DISKRET KVADRATIK AKSLANTIRISH UCHUN QO‘ZG‘ALMAS NUQTALAR, BIFURKATSIYALAR

Annotatsiya. *Ushbu maqolada aholining iqtisodiy faolligini diskret vaqtli dinamik tizimlar yordamida modellashtirish masalasi o‘rganiladi. Iqtisodiy faollik ko‘rsatkichlari – faol aholi ulushi* x_n *va iqtisodiy passiv aholi ulushi* y_n *o‘zaro bog‘liq diskret tizim orqali tasvirlanadi. Asosiy o‘rganish obyekti sifatida tizimning invariant to‘g‘ri chiziqdan hosil qilingan bir o‘lchovli kvadratik akslantirish tanlangan. Maqolada ushbu akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari, ularning barqarorligi, bifurkatsiya diagrammasi va xaotik xulq-atvorga o‘tish shartlari tahlil qilinadi. Asosiy natija sifatida teorema isbotlangan bo‘lib, unda parametrning ma’lum qiymatida tizimda davr-3 orbitasi paydo bo‘lishi va Li-York teoremasi asosida xaosning yuzaga kelishi ko‘rsatilgan. Natijalar iqtisodiy tizimlarning uzoq muddatli xulq-atvorini bashorat qilishda muhim amaliy ahamiyatga ega.*

Kalit so‘zlar: *diskret dinamik tizim, kvadratik akslantirish, barqarorlik, bifurkatsiya, xaos, iqtisodiy modellashtirish, invariant to‘g‘ri chiziq, Li-York teoremasi, Feigenbaum doimiysi, davr-3.*

Исламова Мавлуда Икрамбаевна (докторант 2-го курса по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» Ургенчского государственного университета имени Абу Райхана Беруни)

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И БИФУРКАЦИИ ДИСКРЕТНОГО КВАДРАТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Аннотация. *В данной статье исследуется задача моделирования экономической активности населения с помощью дискретных динамических систем во времени. Показатели экономической активности – доля экономически активного населения* x_n *и доля экономически неактивного населения* y_n *– описываются с помощью взаимосвязанной дискретной системы. В качестве основного объекта исследования выбрано одномерное квадратичное отображение, полученное из инвариантной прямой системы. В статье анализируются неподвижные точки данного отображения, их устойчивость, бифуркационная диаграмма и условия перехода к хаотическому поведению. В качестве основного результата доказана теорема, в которой показано, что при определённом значении параметра в системе возникает орбита периода 3, и на основе теоремы Ли-Йорка устанавливается возникновение хаоса. Полученные результаты имеют важное практическое значение для прогнозирования долгосрочного поведения экономических систем.*

Ключевые слова: *дискретная динамическая система, квадратичное отображение, устойчивость, бифуркация, хаос, экономическое моделирование, инвариантная прямая, теорема Ли-Йорка, постоянная Фейгенбаума, период-3.*

Islamova Mavluda Ikrambayevna (2nd-year PhD student in the specialty Mathematical Modeling, Numerical Methods, and Software Systems at Urgench State University named after Abu Rayhan Beruni)

FIXED POINTS AND BIFURCATIONS OF A DISCRETE QUADRATIC MAPPING

Annotation. *This article studies the problem of modeling the economic activity of the population using discrete-time dynamical systems. The indicators of economic activity – the share of economically active population* x_n *and the share of economically inactive population* y_n *– are described by an interconnected discrete system. As the main object of study, a one-dimensional quadratic mapping obtained from an invariant straight line of the system is considered. The paper analyzes the fixed points of this mapping, their stability, the bifurcation diagram, and the conditions for transition to chaotic behavior. As a main result, a theorem is proved showing that, for a certain parameter value, a period-3 orbit appears in the system, and based on the Li–Yorke theorem, the emergence of chaos is established. The obtained results have important practical significance for predicting the long-term behavior of economic systems.*

Keywords: *discrete dynamic system, quadratic mapping, stability, bifurcation, chaos, economic modeling, invariant line, Lee-York theorem, Feigenbaum constant, period-3.*

Kirish. Iqtisodiy tizimlarni dinamik modellar yordamida o‘rganish zamonaviy matematik iqtisodiyotning asosiy yo‘nalishlaridan biridir. Aholining mehnat bozoridagi faolligini, ya’ni faol va passiv ishchi kuchining o‘zaro ta’sirini – modellashtirish masalasi bir qator fundamental savollarga javob beradi: tizim uzoq muddatda barqaror holatga keladimi? Qanday parametr qiymatlarida davriy davriy tebranishlar yoki hatto xaotik xulq-atvor yuzaga keladi?

Mazkur maqolada biz quyidagi ikki o‘lchovli diskret tizimni asos sifatida olamiz [1, 2]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1+ay_n) \\ y_{n+1} = y_n(1+bx_n) \end{cases} \tag{1}$$

bu yerda x_n – iqtisodiy jihatdan faol bo‘lgan aholining ulushi (masalan, ishlayanlar yoki faol ishchi kuchining ulushi), y_n – iqtisodiy jihatdan passiv aholining ulushi (ishsizlar, o‘quvchilar, nafaqaxo‘rlar va boshqalar), $a,b \in \mathbb{R}$ – o‘zaro ta’sir intensivligini ifodalovchi parametrlar.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Bunday tizimlar biologik populyatsiya dinamikasini [5, 6], epidemiologik modellarni [6] va iqtisodiy sikllarni [5] tasvirlashda keng qo‘llaniladi. Biroq $b=-a$, $|a| \le 1$ va $x+y=1$ shartlaridan tashqarida tizimning global xulq-atvori hali to‘liq o‘rganilmagan.

Ushbu maqolaning yangiligi shundaki, biz $a=1,\ b=-1$ holda (1) tizimning invariant to‘g‘ri chizig‘idan bir o‘lchovli kvadratik akslantirish hosil qilamiz va ushbu akslantirishning barqarorlik, bifurkatsiya va xaos nazariyasini to‘liq o‘rganib chiqamiz. Olingan natijalar iqtisodiy faollik dinamikasini talqin qilishda konkret iqtisodiy ma’noga ega.

Tadqiqot metodologiyasi. Iqtisodiy faollik modelida x_n –faol aholi ulushi ($0 \le x \le 1$) va y_n – passiv aholi ulushi ($0 \le y \le 1$) deb olib, biz $a=1,\ b=-1$ qiymatlarini tanlaymiz. Bu holda (1) tizim quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1+y_n) \\ y_{n+1} = y_n(1-x_n) \end{cases} \tag{3}$$

Iqtisodiy talqin: faol aholi ulushi keyingi davrda passiv aholining ta’siri ostida ortadi (passiv aholi faol toifaga o‘tishi mumkin, masalan, ish topganda), passiv aholi ulushi esa faol aholi ta’sirida kamayadi (ish joylari yaratilganda).

(3) tizimning invariant to‘g‘ri chizig‘i – bu f akslantirish ostida o‘z-o‘ziga o‘tadigan chiziq. (3) tizim uchun $x_n+y_n=p$ chizig‘i invariant ekanligini ko‘rsatamiz:

Darhaqiqat,

$$x_{n+1}+y_{n+1} = x_n(1+y_n)+y_n(1-x_n) = x_n+x_ny_n+y_n-x_ny_n = x_n+y_n = p.$$

Shu invariant to‘g‘ri chiziqdan foydalanamiz: $y_n = p-x_n$. Buni (3) tizimning birinchi tenglamasiga qo‘yib,

$$x_{n+1} = x_n(1+p-x_n) \tag{4}$$

(4) bir o‘zgaruvchili kvadratik iterativ akslantirish bo‘lib, logistik akslantirishga o‘xshash ko‘rinishga ega. Bu bizning asosiy o‘rganish obyektimiz bo‘ladi. Aholining faol ulushi x_n evolutsiyasi endi ya-gona parametr p (faol va passiv aholining umumiy ulushi yig‘indisi) orqali to‘la tavsiflanadi.

Tahlil va natijalar. (4) akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalarini topamiz. $f(x)=x(1+p-x)$ deb belgilasak, $f(x)=x$ tenglama quyidagini beradi: $x_1=0$ $x_2=p$

Iqtisodiy ma’nosi: $x_1=0$ –aholining butunlay passiv bo‘lib qolishi holati; $x_2=p$ – faol va passiv aholining muvozanat holati.

1-teorema (Asosiy barqarorlik teoremasi). $x_{n+1}=x_n(1+p-x_n)$ akslantirish uchun:

1. $x_1=0$ qo‘zg‘almas nuqta $p\in[-2;0)$ da asimptotik barqaror va $p\in(-\infty;-2)\cup[0;+\infty)$ da beqarordir.

2. $x_2=p$ qo‘zg‘almas nuqta $p\in(0;2]$ da asimptotik barqaror va $p\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$ da beqarordir.

Isbot. (4) akslantirishning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x)=1+p-2x. \tag{5}$$

1-qism ($x_1=0$ barqarorligi). $f'(0)=1+p.$ Barqarorlik mezoni $|f'(0)|<1$ shartidan:

$-1<1+p<1 \Rightarrow -2<p<0.$

Demak, $x_1=0$ nuqta $p\in(-2;0)$ da asimptotik barqaror, $p\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ da esa beqarordir.

Chegara nuqtalarini alohida tekshiramiz. $p=0$ holda $f'(0)=1$: $f'(x)=-2\neq 0$ bo‘lgani uchun $x_1=0$ beqarordir.

$p=-2$ holda $f'(0)=-1$: Shvarts hosilasini hisoblaymiz: $f''(x)=-2$, $f'''(x)=0$ bo‘lgani uchun:

$$Sf(0)=-6<0.$$

Shvarts hosila manfiy bo‘lgani uchun $x_1=0$ asimptotik barqarordir.

2-qism ($x_2=p$ barqarorligi). $f'(p)=1+p-2p=1-p.$ Barqarorlik mezoni $|f'(p)|<1$ shartidan:

$$-1<1-p<1\Rightarrow 0<p<2.$$

Demak, $x_2=p$ nuqta $p\in(0;2)$ da asimptotik barqaror, $p\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ da esa beqarordir.

p = 0 holda $x_2=0=x_1: f''(0)=-2\neq 0$ bo‘lgani uchun, $x_2=0$ beqarordir.

p = 2 holda $f'(2)=-1$: *f'(2) = –1*: Shvarts hosilasini hisoblaymiz:

$$Sf(2)=-6<0.$$

Shvarts hosila manfiy bo‘lgani uchun, $x_2=p=2$ asimptotik barqarordir. Teorema to‘liq isbotlandi.

Bifurkatsiya va xaotik rejimga o‘tish. (4) akslantirishning 2-davrli nuqtalari $f(f(x))=x$ tenglamadan aniqlanadi. Hisob-kitoblar natijasida bu kvadrat tenglamaning yechimlari:

$$x_1=\frac{p+2+\sqrt{p^2-4}}{2} \text{ va } x_2=\frac{p+2-\sqrt{p^2-4}}{2}. \tag{6}$$

2-davrli sikl $|f'(x_1)f'(x_2)|<1$ shart bajarilganda asimptotik barqaror bo‘ladi. Hisob-kitoblar shuni ko‘rsatadiki, 2-davrli sikl $p\in[2;2\sqrt{2})$ da asimptotik barqaror. $p=2$ da global bifurkatsiya kuzatiladi: barqaror qo‘zg‘almas nuqta $x_2=2$ beqarorlashadi va barqaror 2-davrli sikl tug‘iladi.

Feigenbaum doimiysi va davrlarning ikkilanishi. (4) akslantirish unimodal bo‘lgani uchun unga Feigenbaum universallik nazariyasi tatbiq etiladi. $\delta \approx 4.6692$ Feigenbaum doimiysi orqali bifurkatsiya parametrlarining ketma-ketligini hisoblaymiz:

n	p_n	Davr
1	2.000000	$1\to 2$
2	2.828427	$2\to 4$
3	3.005851	$4\to 8$

1-jadval. Davrlarning ikkilanish parametrlari ketma-ketligi.

2-teorema (Xaosning kelib chiqishi – Li-York teoremasi tatbiqi). $p=2\sqrt{2}$ qiymatida (4) akslantirishda davr-3 orbitasi paydo bo‘ladi va Li-York teoremasi asosida tizimda har qanday davrdagi orbitalar mavjud bo‘lib, dinamika xaotik xarakter kasb etadi.

Isbot. Davr-3 nuqtalarini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} f^3(x)-x=0, \\ (f^3)'(x)=1. \end{cases}$$

Bu sistemani quyidagicha qayta yozamiz: $P(x)=f^3(x)-x$ va $Q(x)=(f^3)'(x)-1$. Ushbu ikkala ko‘phadning resultantini hisoblab,

$$\mathrm{Re}sx(P(x),Q(x))=-p^2(p^2-8)^3(p^2-3p+3)^4(p^2+3p+3)^4.. \qquad (7)$$

Resultant nolga teng bo‘lishi uchun $p^2-8=0$, ya’ni $p=2\sqrt{2}$ bo‘lishi kerak (boshqa omillar haqiqiy ildizga ega emas). Shunday qilib, $p=2\sqrt{2}$ da davr-3 orbitasi paydo bo‘ladi.

Li-York teoremasi [3] asosida: agar bir o‘lchovli uzluksiz akslantirish davr-3 ga ega bo‘lsa, u holda u har qanday $k\in \mathrm{N}$ uchun davr-*k* ga ega orbitalarga ham ega va dinamika xaotikdir (Sharkovskiy tartibi asosida). Bu iqtisodiy tizimda aholining iqtisodiy faolligining tartibsiz, bashorat qilib bo‘lmaydigan tarzda o‘zgarishini anglatadi. Teorema isbotlandi.

Olingan matematik natijalarni iqtisodiy jihatdan talqin qilamiz. (4) akslantirishning parametri p – bu iqtisodiy faol va passiv aholining umumiy ulushi yig‘indisi bo‘lib, u iqtisodiy faollikning integral ko‘rsatkichi sifatida xizmat qiladi.

Barqaror muvozanat holati ($p\in(0,2]$). Agar iqtisodiy faollik ko‘rsatkichi kichik bo‘lsa, tizim $x^*=p$ muvozanat holatiga, ya’ni ma’lum bir doimiy iqtisodiy faollik darajasiga yaqinlashadi.

Siklik davriy tebranishlar ($p\in[2,2\sqrt{2})$). Parametr $p=2$ dan o‘tganda, tizimda 2-davrli sikl vujudga keladi: iqtisodiy faollik bir davrda yuqori, keyingisida past bo‘lib, iqtisodiy sikl paydo bo‘ladi

Xaotik rejim ($p\geq 2\sqrt{2}\approx 2.828$). Parametr $p=2\sqrt{2}$ qiymatida davr-3 orbitasi paydo bo‘lishi va Li-York teoremasi asosida xaosning kelib chiqishi iqtisodiy jihatdan quyidagini anglatadi: aholining iqtisodiy faollik darajasi vaqt o‘tishi bilan tartibsiz tarzda o‘zgarib, uzoq muddatli bashorat qilish imkonsiz bo‘lib qoladi.

Xulosa va takliflar. Ushbu maqolada aholining iqtisodiy faolligini modellashtiruvchi ikki o‘lchovli diskret tizimdan invariant to‘g‘ri chiziq usuli yordamida bir o‘lchovli kvadratik akslantirish hosil qilindi va uning dinamikasi to‘liq o‘rganildi. Asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

1. Kvadratik akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari aniqlandi va ularning barqarorligi parametr p ga ko‘ra, to‘liq tavsiflanib, 1-teorema isbotlandi.

2. $p = 2$ da global bifurkatsiya, $p \in [2, 2\sqrt{2})$ da barqaror 2-davrli sikl mavjudligi ko‘rsatildi.

3. $p = 2\sqrt{2}$ da davr-3 orbitasi paydo bo‘ladi va Li-York teoremasi asosida tizim xaotik rejimga o‘tadi.

Kelgusida tadqiqotni quyidagi yo‘nalishlarda davom ettirish ko‘zda tutilgan: $a = 1$, $b = -1$ shartlari olib tashlangan umumiy holni o‘rganish; ko‘p o‘lchovli iqtisodiy modellar uchun o‘xshash tahlilni o‘tkazish; xaosni boshqarish usullari – kichik ta’sirotlar yoki teskari aloqa asosidagi barqarorlashtirish metodlarini ishlab chiqish.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

[1]. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. San Francisco, 1982, 460 p.

[2]. Falconer K.J. Julia sets and the Mandelbrot set. Oxford University Press, 2013, 132 p.

[3]. Devaney R.L. The Mandelbrot and Julia Sets. A Toolkit of Dynamics Activities. Key Curriculum Press, 2000, 151 p.

[4]. Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J. Coexistence chaotic behavior on the evolution of populations of the biological systems modeling by three dimensional quadratic mappings. Global and Stochastic Analysis, 2021, vol. 8, № 3, p. 41–45.

[5]. Ganikhodzhaev R., Pirnapasov A. Dynamical systems generated by quadratic homeomorphisms of 2D simplex. Journal of Physics: Conference Series 697, 2016, 012011.

[6]. Seytov Sh.J., Narziyev N.B., Eshniyozov A.I., Nishonov S.N. The algorithms for developing computer programs for the sets of Julia and Mandelbrot. AIP Conference Proceedings. 2023, vol. 2789, № 1, 050021.

Азимов Дониер Бахром угли (Преподаватель кафедры “Прикладная математика и математическая физика”, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; email: doniyor.azimov.97@bk.ru)

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЪЕДИНЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА И КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В ВИДЕ СУММЫ

Аннотация. *В данной работе рассматривается задача интегрирования объединённого уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) и его отрицательного аналога в классе периодических функций. Показано, что для решения этой задачи эффективно применяется метод обратной спектральной задачи. Исследована динамика спектральных характеристик оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, связанного с рассматриваемой моделью. Полученные результаты подтверждают возможность использования методов обратной спектральной теории при интегрировании объединённого уравнения КдФ и КдФ отрицательного порядка в классе периодических функций.*

Ключевые слова: *объединенное уравнение КдФ-КдФоп, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

YIG‘INDI KO‘RINISHIDAGI MOSLANGAN MANBALI NOCHIZIQLI KORTEVEG-DE FRIZ VA MANFIY TARTIBLI KORTEVEG-DE FRIZ TENGLAMALARI UCHUN ARALASH MASALA

Annotatsiya. *Ushbu ishda davriy funksiyalar sinfida Korteveg-de Friz (KdF) tenglamasi va uning manfiy tartibli analogining umumlasghan tenglamasini integrallash masalasi ko‘rib chiqiladi. Mazkur masalani yechishda teskari spektral masala usuli samarali qo‘llanilishi ko‘rsatilgan. Qaralayotgan model bilan bog‘liq bo‘lgan, davriy potensialga ega Shturm-Liuvill operatorining spektral xarakteristikalari dinamikasi tadqiq etilgan. Olingan natijalar davriy funksiyalar sinfida birlashtirilgan KdF tenglamasi va manfiy tartibli KdF tenglamasini integrallashda teskari spektral nazariya usullaridan foydalanish mumkinligini tasdiqlaydi.*

Kalit so‘zlar: *umumlashgan Korteveg-de Friz va manfiy tartibli Korteveg–de Friz tenglamasi, teskari spektral masala, Dubrovin tenglamalari tizimi, izlar formulalari.*

A MIXED PROBLEM FOR THE COMBINED NONLINEAR KORTEWEG-DE VRIES EQUATION AND ITS NEGATIVE-ORDER COUNTERPART WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE IN THE FORM OF A SUM

Annotation. *In this work, the problem of integrating the combined Korteweg-de Vries equation (KdV) equation and its negative-order counterpart in the class of periodic functions is considered. It is*