funksiya $\mathbb{C}$ ga golomorf davom etadi, ya'ni, $|z|>R$, $R>m$ sohada butun funksiya bo'ladi. Natijada

$$\ln|f_m(z)|\le C'+d\rho(z)=C'+2d\ln|z|$$

bo'lishidan $f_m(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_dz^d$ ko'rinishdagi d-darajali ko'phad bo'ladi. $f(z)$ funksiya $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ da golomorf bo'lib, cheksizlikda $|z|^d$ dan oshmaydi. Liuvill ([8], 2-bob, 6-§, 2-teorema) teoremasiga ko'ra, $f_m(z)$ darajasi d dan katta bo'lmagan ko'phad bo'ladi. (4) dan

$$f(z)=f_m(z)+g_1(z)+g_2(z)+\ldots+g_m(z)$$

tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikning o'ng qismini $g_i(z)$, $i=1,2,\ldots,m$ larni umumiy maxrajga keltirib, soddalashtirsak ushbu

$$f(z)=\sum_{j_0+2j_1+4j_2+\ldots+2^nj_n=0}^{d}C_{j_0j_1\ldots j_n}z^{j_0}\cdot\frac{1}{(z-1)^{j_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{(z-m)^{j_n}}$$

tenglik hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

[9] ishda $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ – parabolik Riman sirtidagi polinomlar fazosi o'lchami, ya'ni, $\dim\mathscr{P}_\rho^d(X)\le 2d$ bo'lishi ko'rsatilgan bo'lib, yuqoridagi teorema isbotsiz keltirilgan.

Maqolada parabolik Shteyn ko'pxilliklarda aniqlangan golomorf funksiyalar sinfi ρ – polinomlarning asosiy xossalari, xususan qamrov funksiyasining logarifmik singulyarliklari yordamida funksiyaning qutb tartiblari bilan bog'liqligi asoslab berilgan. Asosiy natija sifatida har qanday d – darajali polinomni chekli sondagi ratsional funksiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkinligi isbotlangan. Bu natija Loran yoyilmasi va Liuvill teoremasiga tayangan holda olingan bo'lib, parabolik ko'pxilliklarda polinomlar tuzilishini yanada chuqurroq tushunish imkonini beradi. Olingan natijalar kompleks analiz, ayniqsa ko'pxilliklar nazariyasida polinomlar va golomorf funksiyalarni o'rganishda muhim ahamiyatga ega bo'lib, keyingi tadqiqotlar uchun asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

(1). Atakhanov K.U. Defect divisors of holomorphic mappings of parabolic analytic sets, Siberian Math. J. 28 (1987), p. 376–381.

(2). Atamuratov A., Sharipova Sh., Parabolik ko'pxilliklarda ekstremal Grin funksiyasi xossalari. "Ilm sarchashmalari", 2015, 6-son.

(3). Aytuna A., Sadullaev A. Parabolic Stein Manifolds. Mathematica Scandinavica. Vol 114, № 1 (2014), p. 86–109.

(4). Aytuna A., Sadullaev A. Polynomials on Parabolic Manifolds, Contemporary mathematics. № 662, 2016, p. 1–22 (arXiv:1504.08092v1 [math.CV] 30 Apr 2015).

(5). Sario L. Nakai M. Classification theory of Riemann sufaces, Grundl. Math. Wiss. 164, Springer, Berlin, 1970.

(6). Stoll W. Value distribution of holomorphic maps into compact complex manifolds, Lecture Notes Math. 135, Springer, Berlin, 1970.

(7). Stoll W. Value distribution on parabolic spaces, Lecture Notes Math. 600, Springer, Berlin, 1977.

(8). Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ, часть 1. "Наука", Москва, 1976.

(9). Atamuratov A.A., Allaberganov O.R. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ – parabolik ko'pxillikda polinomlar fazosi. „Ilm sarchashmalari", 2022.

Sultanov Baxodir Yuldashevich (Urganch davlat Pedagogika instituti, f.-m.f.n., dotsent v.b.;
E-mail: sultanovbaxodir667@gmail.com)

ELLIPSDAGI CHIZIQLAR OILASINING MODULI HAQIDA

Annotatsiya. *Chiziqlar oilasining moduli qaralayotgan sohalar oddiy(to'g'ri to'rtburchak, konsentrik halqa, fazoda parallelepiped kabi) bo'lgan hollardagina hosoblangan. Ushbu maqolada tekislikdagi ellipsni yon tomonlarini tutashtiruvchi chiziqlar oilasining moduli yordamchi konform akslantirishlar*

yordamida to'g'ri to'rtburchakka keltirib hisoblangan. Bunda Jukovskiy funksiyasi(uning teskarisi) va elliptik integrallardan foydalanilgan.

Kalit so'zlar: *ellips, chiziqlar oilasining moduli, konform akslantirish, kvazikonform akslantirish, elliptik integral.*

Баходир Юлдашевич Султанов (Ургенчский государственный педагогический институт, к.ф.-м.н. наук, и.о. доцент; E-mail: sultanovbaxodir667@gmail.com)

О МОДУЛЕ СЕМЕЙСТВА ПРЯМЫХ НА ЭЛЛИПСЕ

Аннотация. *Модуль конкретных семейства кривых вычислены только тогда, когда рассматриваемые области являются простыми (например, прямоугольник, концентрическое кольцо, параллелепипед в пространстве). В данной статье модуль семейства прямых, соединяющих стороны эллипса в плоскости, вычисляется путем приведения его к прямоугольнику с использованием вспомогательных конформных отражений. Используются функция Жуковского (ее обратная функция) и эллиптические интегралы.*

Ключевые слова: *эллипс, модуль семейства кривых, конформное отражение, квазиконфортное отражение, эллиптический интеграл.*

Sultanov Bakhodir Yuldashevich (Urgench State Pedagogical Institute, PhD, Associate Professor; Email: sultanovbaxodir667@gmail.com)

ABOUT THE MODULUS OF A FAMILY OF LINES ON AN ELLIPSE

Annotation. *The modulus of a specific family of curves is calculated only when the domains under consideration are simple (e.g., a rectangle, a concentric ring, or a parallelepiped in space). In this article, the modulus of a family of lines connecting the sides of an ellipse in a plane is calculated by reducing it to a rectangle using auxiliary conformal reflections. The Joukowski function (its inverse) and elliptic integrals are used.*

Key words: *ellipse, modulus of a family of curves, conformal reflection, quasiconformal reflection, elliptic integral.*

Kirish. Kvazikonform akslantirishlarning tekislikdagi geometrik nazariyasidagi masalalarni yechishda asosiy instrument sifatida konform akslantirishlar va chiziqlar oilasining modulini o'zgarishini o'rganish muhimdir. Fazoda esa konform akslantirishlar affin akslantirishlaridan iborat bo'lib qolganidan, fazodagi va tekislikda chiziqlar oilasining modulini o'rganish juda dolzarbdir. Tekislikda chiziqlar oilasining moduli to'g'ri to'rtburchak, konsentrik halqa bo'lgan hollardagina hosoblangan. Ushbu maqolada tekislikdagi murakkabroq bo'lgan soha-ellipsni yon tomonlarini tutashtiruvchi chiziqlar oilasining moduli hisoblangan.

Ma'lumki, chiziqlar oilasining moduli mos kondensator sig'imiga teng. Bu va shunga o'xshagan tatbiqlardan ko'rilayotgan masalani amaliy ahamiyatga ega bo'lgan dolzarb mavzuga bog'ishlangan degan xulosaga kelamiz.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili. Tekislikda kvazikonform akslantirishlar nazariyasi 1928-yildagi Gryoch masalasidan boshlanib klassik nazariyaga aylangan [1]. Bu nazariyada geometrik masalalarni yechish uchun asosiy instrumentlar sifatida konform akslantirishlar va chiziqlar oilasining modulini o'zgarishini baholash xizmat qiladi. Fazoda kvazikonform akslantirishlarni kiritilashiga esa 1960-yildagi B.V. Shabatning parallelepipeddagi chiziqlar oilalarining modullarini kiritilishi asos bo'lgan [2]. Fazodagi konform akslantirishlar faqat affin akslantirishlaridan iboratligi sababli fazoviy kvazikonform akslantirishlar geometrik nazatiyasida masalalarni yechishda asosiy instrument faqat chiziqlar oilasining moduli, unga mos kondensator sig'imi hamda ularning umumlashmalari(konfiguratsiya moduli, unga mos polikondensator sig'imi)ni o'zgarishini baholashlar xizmat qiladi [3].

Tikislikda va fazoda juda kam hollarda, qaralayotgan sohaning sodda ko'rinishlari uchun(to'g'ri to'rtburchak, doiraviy halqa, parallelepiped kabilardagi) chiziqlar oilasining modullari hisoblangan. Men tomonimdan "Trapetsiyadagi chiziqlar oilasining moduli" mavzusidagi tezisimda trapetsiyaning qarama-qarshi yon tomonlarini tutashtiruvchi chiziqlar oilasining moduli hisoblangan. Ushbu maqolada esa ellips ichidagi bitta chiziqlar oilasining moduli hisoblangan.

Tadqiqot metodologiyasi. Tekislikdasi kvazikonform akslantirishlarning geometrik nazariyasida chegarasi bir nuqtadan ko'p bo'lgan ixtiyoriy bir bog'lamli sohani birlik doiraga konform akslantirish mumkin (Riman teoremasi)ligidan foydalanib, biz ellipsni to'g'ri to'rtburchakka o'tkazish mumkinligi haqidagi xulosani olamiz. Ammo aynan shu akslantirishni o'zini qurish esa ancha murakkab jarayondir. Maqolada izlanadigan akslantirish Jukovskiy funksiyasiga teskari akslantirish va elliptik integrallar yordamida amalga oshiriladi.

Tahlil va natijalar. OXY Dekard koordinatalar tekisligida simmetriya markazi $(0,0)$ nuqtada bo‘l-gan ellips D berilgan bo‘lsin. U holda uning fokal masofasi $c=\sqrt{a^2-b^2}$ hamda fokuslari $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ nuqtalarda bo‘ladi.

Masala. Shu ellepsni $x\le -c$ va $x\ge c$ yarim tekisliklardagi qismlarini tutashtiruvchi va ellips ichida yotuvchi chiziqlar oilasi Γ ni moduli $M(\Gamma)$ ni toping.

Eslatma. OXY tekisligida $\Gamma=\{\gamma\},\gamma\subset D$ chiziqlar oilasining moduli $M(\Gamma)$ quyidagicha aniqlanar edi:

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho}\iint_{D}\rho^2(x,y)dxdy\,.$$

Bunda $\inf$ barcha $\rho(x,y)\ge 0$ bo‘lgan hamda Γ chiziqlar oilasiga tegishli bo‘lgan har bir lokal yig‘iluvchi $\gamma\in\Gamma$ chiziqlar uchun

$$\int_{\gamma}\rho ds\ge 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barel funksiyalari(metrikalari) bo‘yicha olinadi.

Yechish. Chiziqlar oilasining moduli konform invariant kattalikdir. Shu sababli Rimann teoremasiga asosan ellipsni to‘g‘ri to‘rtburchakka konform akslantirib, ellipsdagi chiziqlar oilasining modulini konform obraz bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakdagi mos chiziqlar oilasining moduli sifatida topamiz.

Birinchi qadamda ellips ichidagi sohani yuqori yarim tekislikka akslantiramiz. Ellips ichidagi soha

$$D=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$$

bo‘lsin. Kompleks tekislikda $z=x+iy$ deb olamiz. Bizda fokus masofa $c=\sqrt{a^2-b^2}$ edi.

Birinchi navbatda, Jukovskiy funksiyasiga teskari akslantirishdan foydalanib, ellips ichini birlik doira ichiga, undan keyin buni yuqori yarim tekislikka o‘tkazib olamiz. Buning uchun fokal masofa yordamida Jukovskiy funksiyasini standartlashtiramiz:

$$z=\frac{c}{2}(\zeta+\frac{1}{\zeta}).$$

Bu akslantirishda ellipsning chegarasi ζ tekisligida radiuslari $R=\frac{a+b}{c}$ va $\frac{1}{R}$ bo‘lgan konsentrik halqaga o‘tadi. Buni sohaga moslab, konform akslantirish yordamida, z tekisligidagi ellips chegarasi va uning ichidagi ba’zi muhim nuqtalar yuqori yarim tekislikka $(\mathrm{Im}(t)>0)$ quyidagicha akslanadi:

$x=c$ nuqta $t=1$ nuqtaga;

$x=-c$ nuqta $t=-1$ nuqtaga.

Ellipsning o‘ng chekka nuqtasi $x=a$ esa $t=\frac{1}{k}$ nuqtaga $(0<k<1)$,

Ellipsning chap chekka nuqtasi $x=-a$ esa $t=-\frac{1}{k}$ nuqtaga o‘tadi.

Bu yerda k parametr elliptik modul(ellips geometriyasiga bog‘liq).

Endi ikkinchi yordamchi akslantirishdan foydalanib yuqori yarim tekislikni to‘g‘ri to‘rtburchakka o‘tkazamiz. Bunda biz $\pm 1va\pm\frac{1}{k}$ uchlari belgilangan yuqori yarim tekislikni to‘g‘ri to‘rtburchakka akslantirish uchun Shvarts-Kristoffel integrali(birinchi tur elliptik integral)dan foydalanamiz

$$w = f(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Bu akslantirish ta'sirida yuqori yarim tekislik to'g'ri to'rtburchakka shunday akslanadiki, bunda:

$t = 1$ nuqta $w = K(k)$ nuqtaga,

$t = \frac{1}{k}$ nuqta $w = K(k) + iK'(k)$ nuqtaga,

$t = -1$ nuqta $w = -K(k)$ nuqtaga,

$t = -\frac{1}{k}$ nuqta $w = -K(k) + iK'(k)$ nuqtaga o'tishini ko'rishimiz mumkin.

Yuqorida amalga oshirilgan akslantirishlardan kelib chiqib, Γ chiziqlar oilasi tutashtirayotgan qismlar xaqida quyidagi xulosalarga kelamiz:

1. $x < c$ qismi t tekisligida $\left(-\frac{1}{k}, -1\right)$ intervaliga, w tekisligida esa yuqorida keltirilgan to'rtburchakning chap tomoniga mos keladi.

2. $x > c$ qismi t tekisligida $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ intervaliga, w tekisligida esa yuqorida keltirilgan to'rtburchakning o'ng tomoniga mos keladi.

Shunday qilib, w tekisligida hosil bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning:

Kengligi (go'rizontal o'lchami): $2K(k)$ (chunki bu uzunlik $-K(k)$ dan $K(k)$ gacha).

Balandligi(vertikal o'lchami): $K'(k)$ (chunki bu uzunlik 0 dan $K'(k)$ gacha.

Biz bilamizki, to'g'ri to'rtburchakning mos qarama-qarshi tomonlarini tutashtiruvchi chiziqlar oilasining moduli

$$M(\Gamma) = \frac{balandlik}{kenglik} = \frac{yuza}{kenglik^2}$$

ekanini hisobga olsak, biz izlayotgan ellips ichidagi Γ chiziqlar oilasining moduli

$$M(\Gamma) = \frac{K'(k)}{2K(k)}$$

teng ekanini olamiz.

Bunda k modul Teyxmuller va konform modullar nazariyasiga ko'ra, ellipsning yarim o'qlari a va b hamda elliptik integrallar modulini bog'lovchi quyidagi transendent tenglamadan aniqlanadi

$$\frac{b}{a} = \frac{K'(k)}{2K(k)} \text{ ya'ni } \frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{2b}{a}$$

Xulosa va takliflar. Kvazikonform akslantirishlarning klassik(tekislikdagi) nazariyasi XX asrning 30-yillarida paydo bo'lib, juda ko'p tadbiqlarga ega bo'lgan sohaga aylandi. Fazoda kvazikonform akslantirishlar esa XX asrning 60-yillaridan boshlab [2]ga qarang) fazoda(parallelepipedda) chiziqlar oilasining modulini aniqlanganidan keyin paydo bo'ldi. Tekislikda masalalarni yechishda chiziqlar oilasining moduli bilan konform akslantirishlar asosiy instrumentlar hisoblanadi. Fazoda konform akslantirishlar faqat affin akslantirishlaridan iboratligi sababli fazoviy masalalarni yechishda asosiy instrument chiziqlar oilasining moduli va uni ekvivalenti bo'lgan kondensator sig'imidan iborat bo'lib qoladi. Shularni e'tiborga olib, amaliy tadbiqlardan kelib chiqib har xil sohalardagi chiziqlar oilasining moduli (unga mos kondensator sig'imi)ni hisoblash muhimdir.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Grötzsch H. Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erueiterung des Picardschen Satzes. Ber. Verh.Sächs. Acad. Wiss., Leipzig, 1928. Bd. 80.-S.503-507.

(2). Шабат Б.В. К теории квазиконформных отображений в пространстве. Докл. АН СССР, 1960, т.132, № 5, с. 1045–1048.

(3). Султанов Б.Ю. О равенстве некоторых конформных инвариантов на римановых многообразиях //Алгебра и дискретная математика. Новосибирск, 1989, с. 78–88.

(4). B.Y.Sultanov. Trapetsiyadagi chiziqlar oilasining moduli. O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi Berdaq nomidagi qaraqalpaq davlat universiteti «Matematika, amaliy matematika va informatsion texnologiyalarning dolzarb masdalalari» mavzusidagi Respublika ilimiy-amaliy konferensiyasi, Nukus. 2026-yıl, 1–2-may, tom I, 61–63-betlar.

Ismoilov Muxiddin Baxrom o‘g‘li (O‘zbekiston xalqaro Islomshunoslik akademiyasi “Zamonaviy axborot kommunikatsiya texnologiyalari” kafedrasi katta o‘qituvchisi; mukhiddin4449@gmail.com),
Ahmedov Qurbonbay Yuldashbayevich (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasi katta o‘qituvchisi; qurbonbayaxmedov@urdu.uz),
Jumaniyozova Xayriniso Xamidbek qizi (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti matematika matematik analiz mutaxassisligi 2-bosqich magistranti; hayrinisojumaniyozova@gmail.com)

MAKSIMAL m-PLYURISUBGARMONIK FUNKSIYALAR

Annotatsiya. *Maqolada m-plyurisubgarmonik va m-subgarmonik funksiyalar sinflari va ularning o‘zaro aloqasi tahlil qilingan. Maksimal m-plyurisubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi asosida fundamental teoremalarning analoglari isbot qilingan. Bu teoremalarni isbot qilishda m-plyurisubgarmonik funksiyalar orasidagi bog‘lanishdan, ya’ni, haqiqiy fazoni kompleks fazoga kengaytirishdan foydalanilgan. Bundan tashqari, maksimallikni ta’minlovchi yetarli shartlar keltirilib, nazariy natijalarga aniq misol keltirilgan.*

Kalit so‘zlar: *m - o‘lchamli tekisliklar, garmonik funksiyalar, subgarmonik funksiyalar, plyurisubgarmonik funksiyalar, m-subgarmonik funksiyalar, m-plyurisubgarmonik funksiyalar, maksimal m-plyurisubgarmonik funksiyalar.*

МАКСИМАЛЬНЫЕ m-ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Аннотация. *В статье исследуются классы m-плюрисубгармонических и m-субгармонических функций, а также анализируется их взаимосвязь. Для максимальных m-плюрисубгармонических функций доказаны аналоги фундаментальных теорем на основе принципа максимума. При доказательстве данных теорем была использована взаимосвязь между рассматриваемыми функциями, а именно вложения вещественного пространства в комплексное пространство. Кроме того, сформулированы достаточные условия, обеспечивающие максимальность, и приведён пример, иллюстрирующий полученные теоретические результаты.*

Ключевые слова: *m - мерная плоскость, гармонические функции, субгармонические функции, плюрисубгармонические функции, m - плюрисубгармонические функции, максимальные m - плюрисубгармонические функции.*

MAXIMAL m-PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

Annotation. *The article analyzes the classes of m-plurisubharmonic and m-subharmonic functions and their interrelations. Analogues of fundamental theorems for maximal m-plurisubharmonic functions are proved based on the maximum principle. In proving these theorems, the relationship between these functions is used, namely, the embedding of real space into a complex space. In addition, sufficient conditions ensuring maximality are given and an example of theoretical results is given.*

Key words: *m - measure plane, harmonic functions, subharmonic functions, plurisubharmonic functions, m-subharmonic functions, m-plurisubharmonic functions, maximal m-plurisubharmonic functions.*

Kirish. Ma’lumki, $\mathbb{R}^n$ fazoda m-o‘lchamli haqiqiy tekisliklar bilan kesimlarida subgarmoniklik xossasiga ega bo‘lgan funksiyalar sinfi zamonaviy qavariq geometriyaning muhim tadqiqot obyektlaridan biri hisoblanadi. Ushbu yo‘nalishda muhim natijalar R Harvi va B.Lauson, shuningdek, F.Forstnerich va boshqa matematik olimlar tomonidan olingan (6–11). Ushbu mualliflar ishlarida $\mathbb{R}^n$ Yevklid fazosidagi m-o‘lchamli haqiqiy tekisliklarda subgarmonik bo‘ladigan funksiyalar sinfi o‘rganilib, ular m-plyuri-