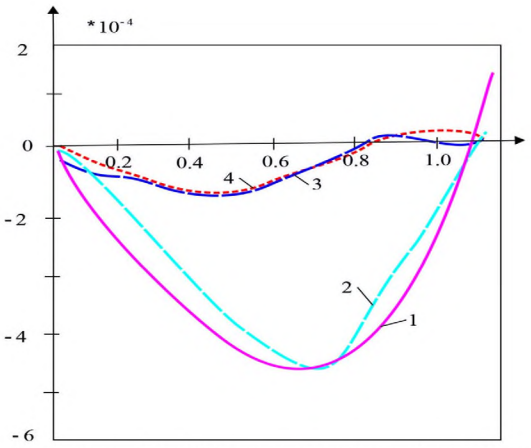


5-rasm. Plastinkaga yopishtirilgan massaning tebranishlar formasi.

$1.\omega^{*} = 0.075; 2.\omega^{*} = 0.090; 3.\omega^{*} = 0.095; 4.\omega^{*} = 0.12; 5.\omega^{*} = 0.15.$

Massalar nisbatini o‘zgarishi chastotalar haqiqiy qismlarining o‘zgarishiga sabab bo‘lar ekan. Materiallarning qovushoqlik xossalarini hisobga olish ko‘chish va kuchlanishlarni 10–15%ga kamaytirishga imkon beradi.

Xulosalar.

1. Qovushoq elastik ortotrop plastinkaga osilgan plastinkani xos tebranishlari massalasini yechish metodikasi asosida chastota transendent tenglamasi olindi. Osilgan massa va oniy elastiklik modulini chastotalar va tebranishlar formasiga ta'siri parametrik o‘rganildi. Sonli natijalalar olinib, tahlil qilindi.

2. Olingan natijalardan ko‘rinib turibdiki, osiladigan massalar nisbatining o‘zgarishiga plastinka va massalarda bo‘ladigan ko‘chishlar amplitudasi kuchli bog‘liq bo‘lar ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). C.Guo, L., Tao, Q., Wang, B., Qin, A., Wang, and X.Shi. Free vibration characteristics of concentric stiffened rectangular plates determined based on spectral Tchebyshev technique. Appl. Acoust., vol. 191, 2022, Art. no. 108670. https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2022.108670.Search in Google Scholar

(2). D.Vasara, S.Khare, H.K.Sharma, and R.Kumar. Free vibration analysis of functionally graded porous rectangularcircular and annular plates using differential quadrature method. Forces Mech., vol. 42, 2022, Art. no. 100126. https://doi.org/10.1016/j.finmec.2022.100126.Search in Google Scholar

(3). M.Chauhan, S.Dvivedi, R.Jha, V.Ranjan, and P.Sathujoda. Sigmoid functionally graded plates embedded on Winkler-Pasternak foundation: free vibration analysis by dynamic stiffness method. Compos. Struct., vol. 288, 2022, Art. № 115400. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115400.Search in Google Scholar

(4). M.O.Belarbi, A.A.Daikh, A. Garg, et al.. Bending and free vibration analysis of porous functionally graded sandwich plate with various porosity distributions using an extended layerwise theory. Arch. Civ. Mech. Eng., vol. 23, №. 1, pp. 1–24, 2022. https://doi.org/10.1007/s43452-022-00551-0.Search in Google Scholar

(5). T.Wu, Z.B.Chen, and J.J.Qu. A modified Fourier-Ritz method for free vibration of rectangular plates with elastic constrains. J. Theor. Appl. Mech., vol. 60, № 1, pp. 77–89, 2022. https://doi.org/10.15632/jtam-pl/144462. Search in Google Scholar

(6). Mirsaidov M.M., Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Dynamics of Structurally Inhomogeneous Lamellar and Shell Mechanical Systems. Part 1. Journal of Applied Mathematics and Physics Vol. 7, №10.October 14,2019. DOI :10.4236/jamp.2019.710155

Имомкулов Севдиёр, Туйчиев Тахир (Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека; sevdiyor_i@mail.ru; tahir290755@gmail.com)

О ПРОДОЛЖЕНИИ СУММЫ РЯДА ХАРТОГСА С ГАРМОНИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. *В данной работе рассматривается вопрос о продолжении сумм рядов Гартогса, допускающих гармоническое продолжение вдоль фиксированного направления, предполагая только лишь гармоничность коэффициентов. Доказывается аналог основной леммы Гартогса для таких рядов.*

Ключевые слова: *гармоническая функция, сепаратно гармонические функции, особая точка, гармоническое продолжение, ряд Гартогса.*

GARMONIK KOEFFITSIYENTLI HARTOGS QATORLARI YIG‘INDISINING DAVOMI TO‘G‘RISIDA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada koeffitsiyentlari garmonik funksiyalardan iborat bo‘lgan va fiksirlangan yo‘nalish bo‘yicha garmonik davom etadigan Gartogs qatori yig‘indisini davom ettirish masalasi o‘rganilgan. Shunday qatorlar uchun Gartogs asosiy lemmasining analogi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar: *garmonik funksiya, separat garmonik funksiyalar, maxsus nuqta, garmonik davom ettirish, Gartogs qatori.*

ABOUT THE CONTINUATION OF THE SUM OF THE HARTOGS SERIES WITH HARMONIC COEFFICIENTS

Annotation. *In this paper we consider the question of continuation of the sums of the Hartogs series, which allow harmonic continuation along a fixed direction, assuming only the harmonicity of the coefficients. An analogue of the main Hartogs lemma for such series is proved.*

Keywords: *harmonic function, separately harmonic functions, singular point, harmonic continuation, Hartogs series.*

Введение. В работе рассматривается вопрос о продолжении сумм рядов Гартогса, допускающих гармоническое продолжение вдоль фиксированного направления, предполагая только лишь гармоничность коэффициентов.

Первый результат относительно функций, допускающих голоморфное продолжение вдоль фиксированного направления, принадлежит Гартогсу [1]: если голоморфная в области $D\times\{|w|<r\}\subset\mathbb{C}_z^n\times\mathbb{C}_w$ функция $f(z,w)$ при каждом фиксированном $z\in D$ голоморфна в круге $|w|<R, R>r>0$, то она голоморфна по совокупности переменных в области $D\times\{|w|<R\}$ (основная лемма Гартогса). К настоящему времени этот результат обобщался во многих направлениях: продолжение сепаратно-аналитических функций, аналоги теоремы Хартогса для мероморфных функций, результаты типа теоремы “острие клина” Н.Н.Боголюбова и др.

Следующая теорема [2] (I.Shimoda. 1957) имеет непосредственное отношение к теореме Хартогса. *Пусть* $E\subset\{|w|<R\}$ *– некоторое счетное множество, имеющее, по крайней мере, одну предельную точку* $w_0\in\{|w|<R\}$. *Если*

1) для любого фиксированного $z\in D$ *функция* $f(z,w)$ *переменного* w *голоморфна в круге* $|w|<R$,

2) для любого фиксированного $w\in E$ *функция* $f(z,w)$ *переменного* z *голоморфна в области* D,

то существует нигде не плотное замкнутое множество $S\subset\left(D\times\{|w|<R\}\right)$ *такое, что* $f(z,w)\in\mathcal{O}\left(\left(D\times\{|w|<R\}\right)\setminus S\right)$.

Из теоремы Сичака-Захарюты [3,4] о сепаратно-аналитических функциях вытекает, что если в теореме I.Shimoda множество $E\subset\{|w|<R\}$ – неплюриполярное, то $S=\varnothing$. В работе [5] теорема I. Shimoda обобщена для случая, когда множество E состоит из одной точки $w=0$, точнее, изучена голоморфность суммы ряда.

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)w^k, \tag{1}$$

предполагая только лишь голоморфность коэффициентов $c_k(z)$. Отметим, что из голоморфности $f(z,w)$ в области $D\times\{|w|<r\}\subset\mathbb{C}_z^n\times\mathbb{C}_w$ следует, что $f(z,w)$ представляется в этой области рядом $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)w^k$, где $c_k(z)$ – голоморфные в области D функции и ряд сходится равномерно внутри $D\times\{|w|<r\}$. Доказано, что *если ряд* (1) *удовлетворяет следующим условиям*

1) $c_k(z)\in\mathcal{O}(D),\quad k=0,1,2...,;$

2) при каждом фиксированном $z \in D$ *ряд сходится в круге* $\{|w| < R\}$, *то существует нигде не плотное замкнутое множество* $S \subset D$ *такое, что*

$$f(z,w) \in \mathcal{O}\left((D \setminus S) \times \{|w| < R\}\right).$$

Показано также, что наличие S в этой теореме необходимо. Для нигде не плотного замкнутого связного множества $S \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением относительно бесконечно удаленной точки (т.е. любую точку $z \in \mathbb{C} \setminus S$ можно соединить непрерывной кривой с бесконечно удаленной точкой) строится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k$, для суммы которого множество $S \times \mathbb{C}$ является неустранимым особым множеством.

В работе [6] эта теорема обобщена для рядов Хартогса с переменным радиусом сходимости. В монографии M.Jarnicki и P.Pflug [7] также подробно исследованы ряды Хартогса (1) и рассмотрены разные варианты особых множеств таких рядов. Далее, в работах [8-11] исследованы свойства R-аналитических, а в работах [12-13] изучены некоторые свойства сепаратно-гармонических функций.

1. **Основной результат.** В недавней работе [12] доказан следующий аналог основной леммы Гартогса для сепаратно гармонических функций.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(x,y)$ *сепаратно-гармоническая в области*

$$D \times V_r = D \times \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r,\ r > 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$$

и для каждой фиксированной $x^0 \in D$ *функция* $u(x^0, y)$ *переменного* y *гармонически продолжается в большой круг*

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y| < R(x^0),\ R(x^0) > r \right\}.$$

Тогда функция $u(x,y)$ *гармонически продолжается в область*

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 : |y| < R_*(x),\ \ x \in D \right\}$$

по совокупности переменных, где функция $\ln \dfrac{1}{R_*(x)}$ *является следом некоторой плюрисубгармонической функции из класса* $\mathcal{H}(\widehat{D})$.

В этой работе мы рассмотрим более общий случай, а именно, не потребуем сепаратной гармоничности функции $u(x,y)$ в области $D \times V_r \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим следующий формальный ряд Гартогса:

$$u(x,w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \rho^{|k|} e^{ik\varphi},\ w = \rho e^{ik\varphi},\ x \in D, \qquad (2)$$

где D область из $\mathbb{R}^n$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть ряд (2) удовлетворяет следующим условиям:*

1) все коэффициенты $c_k(x) \in h(D)$ *– гармонические функции;*

2) для каждого фиксированного $x \in D$ *выполняется неравенство*

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[|k|]{|c_k(x)|} \le \frac{1}{R}$, $R > 0$.

Тогда существует нигде не плотное замкнутое множество $S \subset D$ *такое, что ряд* (2) *локально равномерно сходится в области* $(D \setminus S) \times \{w: |w| < R\}$ *и сумма ряда* $u(x,w)$ *принадлежит классу* $h((D \setminus S) \times \{w: |w| < R\})$ *гармонических функций.*

Заметим, что если функция $u(x,w)$ является сепаратно-гармонической в некоторой области $D \times V_r \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$, то по теореме Лелона [14] эта функция будет гармонической в области $D \times V_r$ и следовательно, она разлагается в ряд (2) с гармоническими коэффициентами $c_k(x)$. Аналогичный результат для рядов Гартогса с голоморфными коэффициентами и имеющих особенности вдоль фиксированного направления получен в работе [15].

2. Доказательство основного результата. При доказательстве теоремы 2 мы воспользуемся следующей леммой из работы [16].

Лемма 1 ([16]). *Рассмотрим пространство* $\mathbb{R}^n(x)$, *вложенное в* $\mathbb{C}^n(z)=\mathbb{R}^n(x)+i\cdot\mathbb{R}^n(y)$, *где* $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z_j=x_j+i\cdot y_j$, $j=1,\ldots,n.$, *и пусть* D *некоторая ограниченная область из* $\mathbb{R}^n(x)$. *Тогда существует область* $\hat{D}\subset\mathbb{C}^n(z)$ *такая, что* $D\subset\hat{D}$ *и для любой функции* $u(x)\in h(D)$ *существует голоморфная в области* $\hat{D}$ *функция* $\hat{u}(z)$ *такая, что* $\hat{u}\big|_D=u$. *Кроме того, для любого числа* $M>1$ *существует подобласть* $\hat{D}_M\subset\hat{D}$, $D\subset\hat{D}_M$, *такое, что* $\|\hat{u}\|_{\hat{D}_M}\le M\|u\|_D$, $\forall u\in h(D)\cap L_\infty(D)$.

Доказательство теоремы 2. Из условий теоремы вытекает, что при каждом фиксированном $x\in D$ последовательность чисел $\left|c_k(z)\right|^{\frac{1}{|k|}}$ ограничена.

Рассмотрим последовательность множеств

$$E_N=\left\{x\in D:\left|c_k(x)\right|^{\frac{1}{|k|}}\le N,\ k=\pm1,\pm2,\ldots\right\},\ N=1,2,\ldots.$$

По построению и из гармоничности коэффициентов $c_k(x)$ в D следует, что эти множества замкнуты, $E_1\subset E_2\subset\ldots$ и $D=\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathrm{E}_N$. По теореме Бэра о категориях область D не представляется в виде объединения нигде не плотных множеств. Поэтому существует число N_0 и точка $x^0\in D$ такие, что E_{N_0} содержит некоторый шар $B(x^0,\rho_0)\subset E_{N_0}$, $\rho_0=\rho(x^0)>0$ с центром в точке x^0. По определению E_N, для всех $x\in B(x^0,\rho_0)$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{|k|}\ln\left|c_k(x)\right|\le\ln N_0,\quad k=1,2,\ldots.$$

Обозначим теперь через D_1 множество всех таких точек $x^0\in D$, что для $x^0\in D_1$ существуют шар $B(x^0,\rho_0)$ и число $N_0=N(x^0)$, для которых имеют место неравенства $\frac{1}{|k|}\ln\left|c_k(x)\right|\le\ln N_0$, $x\in B(x^0,\rho_0)$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$, т.е. в некоторой окрестности точки x^0 все функции $\frac{1}{|k|}\ln\left|c_k(x)\right|$ ограничены сверху некоторой константой N_0. Тогда множество $S_1=D\setminus D_1$ – замкнуто и нигде не плотно в D.

Действительно, если не так, то S_1 содержит некоторую окрестность $U:U\subset S_1$. Тогда по доказанному выше существует шар $B\subset U$ такой, что в этом шаре функции $\frac{1}{|k|}\ln\left|c_k(x)\right|$ равномерно ограничены сверху, т.е. для некоторого N неравенство

$$\frac{1}{k}\ln\left|c_k(x)\right|\le\ln N$$

выполняется для всех $x\in B$ и $k=1,2,\ldots$. Полученное противоречие доказывает нигде не плотность множества S_1.

Теперь берём произвольное число $\varepsilon>0$ и рассмотрим следующие множества:

$$F_M = \left\{ x \in D : \left| c_k(x) \right|^{\frac{1}{|k|}} \le \frac{1}{R-\varepsilon},\ \forall k : |k| > M \right\},\ M = 1,2,\ldots .$$

Ясно, что эти множества замкнуты, $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_M \subset \ldots$ и $D = \bigcup_{M=1}^{\infty} F_M$. Поэтому существует число $M_0 = M(x^0)$ и точка $x^0 \in D$ такие, что F_{M_0} содержит некоторый шар $B(x^0, \rho_0) \subset F_{M_0}$, $\rho_0 = \rho(x^0) > 0$ с центром в точке x^0. По определению F_M, для всех $x \in B(x^0, \rho_0)$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{|k|} \ln \left| c_k(x) \right| \le \ln \frac{1}{R-\varepsilon}, \quad \forall k : |k| > M_0 .$$

Обозначим теперь через D_2 множество всех таких точек $x^0 \in D$, что в некоторой окрестности точки x^0 и все функции $\frac{1}{|k|} \ln \left| c_k(x) \right|$, $k : |k| > M_0$, равномерно ограничены сверху константой $\ln \frac{1}{R-\varepsilon}$. Тогда множество $S_2 = D \setminus D_2$ – замкнуто и нигде не плотно в D.

Теперь покажем, что ряд (2) локально равномерно сходится в области $(D \setminus S) \times \{ w : |w| < R \}$, где $S = S_1 \cup S_2$. Берём произвольную точку $x^0 \in D \setminus S$. По определению существуют шар $B(x^0, \rho_0)$, числа N_0 и M_0 такие, что для всех $x \in B(x^0, \rho_0)$ и $k = 1,2,\ldots$ имеет место оценка $\left| c_k(x) \right| \le N_0^k$. Согласно леммы 1 существует область $\hat{B} \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ такая, что все коэффициенты $c_k(x)$ голоморфно продолжаются в $\hat{B}$ и для всех $z \in \hat{B}$ имеет место равномерная оценка $\left| \hat{c}_k(z) \right| \le 2N_0^k$, т.е. для всех плюрисубгармонических функций $\frac{1}{|k|} \ln \left| \hat{c}_k(z) \right|$ имеет место оценка

$$\frac{1}{|k|} \ln \left| \hat{c}_k(z) \right| \le \ln \frac{1}{r},\ r = \frac{1}{2N_0},\ \forall z \in \hat{B}. \tag{3}$$

С другой стороны также имеет место следующая оценка

$$\frac{1}{|k|} \ln \left| c_k(x) \right| \le \ln \frac{1}{R-\varepsilon},\ \forall x \in B(x^0, \rho_0),\ \forall k : |k| > M_0 . \tag{4}$$

Объединяя оценки (3) и (4) согласно теореме “о двух констант” (см.[17]) получим следующую оценку

$$\frac{1}{|k|} \ln \left| \hat{c}_k(z) \right| \le \omega^*(z, B, \hat{B}) \ln \frac{1}{r} + (1 - \omega^*(z, B, \hat{B})) \ln \frac{1}{R-\varepsilon},\ \forall z \in \hat{B},\ \forall k : |k| > M_0 . \tag{5}$$

Здесь $\omega^*(z, B, \hat{B})$ P–мера шара $B = B(x^0, \rho_0)$ относительно области $\hat{B}$: $B \subset \hat{B} \subset \mathbb{C}^n$ (см. [17,18]):

$$\omega^*(z, B, \hat{B}) = \overline{\lim_{z' \to z}} \omega(z', B, \hat{B}),\ z \in \hat{B},$$

где

$$\omega(z, B, \hat{B}) = \sup \left\{ u(z) : u \in psh\left(\hat{B}\right),\ u\big|_B \le 0,\ u\big|_{\hat{B}} \le 1 \right\}.$$

Из оценки (5) получим следующую оценку для коэффициентов $\hat{c}_k(z)$:

$$\left|\hat{c}_k(z)\right|^{\frac{1}{|k|}} \le \frac{1}{r^{\omega^*(z,B,\hat{B})}(R-\varepsilon)^{1-\omega^*(z,B,\hat{B})}},\ \forall z \in \hat{B},\ \forall k : |k| > M_0. \qquad (6)$$

Из этой оценки (6) следует, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_k(z)\rho^{|k|}e^{ik\varphi},\ w = \rho e^{ik\varphi},\ z \in \hat{B}.$$

локально равномерно сходится в области $\hat{B} \times \left\{w : |w| < r^{\omega^*(z,B,\hat{B})}(R-\varepsilon)^{1-\omega^*(z,B,\hat{B})}\right\}$ по совокупности переменных. Отсюда из произвольности точки $x^0 \in D \setminus S$ и числа $\varepsilon > 0$ следует, что ряд (2) локально равномерно сходится в области $(D \setminus S) \times \{w : |w| < R\}$ по совокупности переменных и её сумма является гармонической функцией. Теорема доказана.

Заключение. Как сказано выше, теорема 2 является обобщением основной леммы Гартогса для гармонических функций и множество S вообще говоря не будет пустым, но если потребовать равномерную сходимость ряда (2) в некоторой окрестности нуля $D \times V_r$, то оно будет пустым. Множество S также является пустым, если последовательность функций $\frac{1}{|k|}\ln|c_k(x)|$ будет локально равно ограниченной сверху. В общем случае, для любого замкнутого нигде не плотного множества $S \subset \mathbb{R}^2$ со связным дополнением можно построить ряд (2) такой, что для этого ряда выполняются условия теоремы 2 и множество $S \times \mathbb{R}^2$ является особой для суммы ряда (2).

Список использованной литературы:

(1). Hartogs F. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Math. Ann. 1906, Vol. 62, pp. 1 – 88.

(2). Shimoda I. Notes on the functions of two complex variables. J.Gokugie Tokushima Univ, 1957, v. 8, p.1–3.

(3). Siciak J. Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of C^N. Ann. pol. Math. 1969, v.22, № 7, p. 145–175.

(4). Захарюта В.П. Сепаратно аналитические функции, обобщения теоремы Хартогса оболочки голоморфности. Мат. сб., 1976, т. 101(143), № 1, с. 57–76.

(5). Туйчиев Т.Т. Об аналоге теоремы Хартогса. Изв.АН. УзССР, сер. физ-мат. наук,1985, №6, с. 26–29.

(6). Садуллаев А.С., Туйчиев Т.Т. О продолжении рядов Хартогса, допускаюших голоморфное продолжение на параллельные сечения. Узб. матем. журнал, 2009, № 1, с. 148–157.

(7). M.Jarnicki, P.Pflug. Separately analitic functions. Europen Matematical Society, 2011.

(8). A.Sadullaev. Real analyticity of a C∞-germ at a origin, Ann. Polon. Math., 2021, Published online. DOI: 10.4064/ap210125-31-3.

(9). Atamuratov A.A., Tishabaev Zh.K., Tuychiev T.T. An analogue of Hartogs lemma for R-analytic functions. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2022.15:2, p. 196–200.

(10). Imomkulov S.A. Continuation of analytic functions along parallel lines. TWMS J. Pure Appl. Math., V. 14, № 1, 2023, pp. 120–124. DOI: 10.30546/2219-1259.14.1.2023.120.

(11). Sadullaev, A., Imomkulov, S. Real-Analytic Continuation Along a Fixed Direction. Lobachevskii J Math 44, 1464–1470 (2023). https://doi.org/10.1134/S1995080223040236660.

(12). Imomkulov S.A., Abdikadirov S.M. An analogue of Hartogs lemma for separately harmonic functions with variable radius of harmonicity. Bulletin of National University of Uzbekistan, Mathematics and Natural Sciences. Volume 6, Issue 4 (2023).

(13). Имомкулов С.А., Абдикадиров С.М. Продолжение сепаратно гармонических функции вдоль фиксированного направления. Вестник Самаркандского государственного университета, 2024. № 1 (143/2).

(14). Lelong P. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables reelles. Ann. Inst. Fourier. 1961, vol. 11, pp. 515–562.

(15). Tuychiev T., Tishabaev J. On the continuation of the Hartogs series with holomorphic coefficients. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2019, Vol. 2, Iss.1, Article 5, pp. 69–76. DOI: https://doi.org/ 10.56017/2181-1318.1021

(16). Садуллаев А.С., Имомкулов С.А. Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на паралельных сечениях. Труды математического института им. В.А.Стеклова, 2006, т. 53, с. 158–174.

(17). Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения Palmarium akademik publishing. Saarbrüchen, Deutschland, 2012.

(18). Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические функции. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., ВИНИТИ, 1985, т. 8, с. 65 – 111.

Яхшимуратов Алишер (университет Мамуна), Матёкубов Оллаберган (УрГУ)

ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА УРАВНЕНИЙ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. *В этой работе получены формулы, выражающие производную по параметру от решений квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля, полагая коэффициенты π -периодическими из полученных формул выведены важные тождества для решений. Кроме того, выведена система уравнений Дубровина, а также приведен пример иллюстрирующий обратную задачу.*

Ключевые слова: *квадратичный пучок уравнений Штурма-Лиувилля, спектральные данные, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

Alisher Yaxshimuratov (Ma'mun universiteti), Ollabergan Matyoqubov (UrDU)

DAVRIY KOEFFITSIYENTLI SHTURM-LIUVILL TENGLAMALARINING KVADRATIK DASTASI UCHUN TESKARI SPEKTRAL MASALA HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu ishda Shturm-Liuvill tenglamalarining kvadrat dastasi yechimlarining parametr bo'yicha hosilasini ifodalovchi formulalar olingan. Koeffitsiyentlarni π -davrli deb hisoblab, olingan formulalardan yechimlar uchun muhim ayniyatlar keltirib chiqarilgan. Bundan tashqari, Dubrovin tenglamalar sistemasi keltirib chiqarilgan va teskari masalani namoyish qiluvchi misol keltirilgan.*

Kalit so'zlar: *Shturm-Liuvill tenglamalarining kvadrat dastasi, spektral berilganlar, teskari spektral masala, Dubrovin tenglamalar sistemasi, izlar formulalari.*

Alisher Yakhshimuratov (Mamun University), Ollabergan Matyokubov (UrSU)

ABOUT THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE QUADRATIC PENCIL OF STURM-LIOUVILLE EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Annotation. *In this paper, formulas expressing the derivative of solutions with respect to parameter of the quadratic pencil of Sturm-Liouville equations are obtained. Assuming that the coefficients are π -periodical, important identities for the solutions from the obtained formulas are deduced. More over, a system of Dubrovin equations is deduced, and an example illustrating the inverse problem is given.*

Keywords: *quadratic pencil of Sturm-Liouville equations, spectral datas, inverse spectral problem, Dubrovin system of equations, trace formulas.*

1. Введение. Обратная задача для квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами на всей прямой исследована в работах Г.Ш.Гусейнова [1,2], Б.А. Бабажанова, А.Б.Хасанова, А.Б.Яхшимуратова [3] и др.

В этой работе получены формулы, выражающие производную по параметру от решений квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля. Полагая коэффициенты π -периодическими из полученных формул выведены важные тождества для решений. В частности, показана не зависимость от параметра спектра квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля с π -периодическими коэффициентами. Кроме того, выведена система уравнений Дубровина, а также приведен пример иллюстрирующий обратную задачу.

2. Основная часть. Рассмотрим квадратичный пучок уравнений Штурма-Лиувилля

$$T(\lambda,\tau)y \equiv -y'' + q(x+\tau)y + 2\lambda\, p(x+\tau)y - \lambda^2 y = 0\,,\ x \in R, \qquad (1)$$

где $p(x), q(x) \in C^1(R)$ действительные функции и τ действительный параметр. Обозначим через $c(x,\lambda,\tau)$ и $s(x,\lambda,\tau)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda,\tau)=1$, $c'(0,\lambda,\tau)=0$ и $s(0,\lambda,\tau)=0$, $s'(0,\lambda,\tau)=1$, соответственно.

Теорема 1. Выполняются следующие тождества: