(7). Wang M., Zhao J. Free boundary problems for a Lotka-Volterra competition system. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2014, 26, p. 655–672.

(8). Gu H., Lin Z., Lou B. Long time behavior of solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries. Journal of Functional Analysis, 2015, 269, p. 1714–1768.

(9). Zhou L. An evolutional free-boundary problem of a reaction-diffusion-advection system. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, 2017, 147, p. 615–648.

(10). Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society, Providence, 1968.

(11). Pao C. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, New York, 1992.

Алмуратов Шавкат Нарпулатович (Ташкентский государственный транспортный университет; д.ф.ф-м.н., доц.; e-mail: almuratovshavkat11@gmail.com),

Савенко Оксана Викторовна (старший преподаватель, Термезский государственный университет; oksi_2005@mail.ru),

Тураев Кахрамон Нортожиевич (старший преподаватель, Термезский государственный университет; Turaevqahramon184@gmail.com),

Тошбоева Наргиза Юлдашовна (старший преподаватель, Ташкентский химико-технологический университет; nargizatoshboyeva25@gmail.com)

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И РАССЕЯНИЕ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ТОННЕЛЕМ БЕЗ ОБДЕЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

Аннотация. *Исследуется задача о напряжённо-деформированном состоянии линейно-вязкоупругого однородного изотропного полупространства с цилиндрической полостью (тоннелем без обделки), ось которой расположена на некоторой глубине параллельно свободной поверхности. К контуру полости приложена нормальная или касательная нагрузка, равномерно движущаяся с постоянной дозвуковой скоростью, меньшей скорости волны Рэлея. В рамках пространственной краевой задачи динамической теории вязкоупругости построено точное аналитическое решение, основанное на разложении волновых потенциалов по плоским волнам, принципе суперпозиции волновых полей и их переразложении в ряды по цилиндрическим функциям. Данный подход позволяет точно учитывать процессы многократного отражения волн от дневной поверхности и их рассеяния на контуре полости без пространственной дискретизации среды. Выявлены закономерности распределения динамических напряжений и перемещений в зависимости от скорости движения нагрузки, глубины заложения полости и вязкоупругих параметров среды. Полученные результаты могут служить эталоном для оценки динамической прочности малых транспортных тоннелей.*

Ключевые слова: *вязкоупругое полупространство, тоннель без обделки, движущаяся нагрузка, дифракция волн, напряжённо-деформированное состояние, аналитическое решение, цилиндрический волновой потенциал.*

HARAKATLANUVCHI YUK TA'SIRIDA QOPLAMASIZ SILINDRIK TUNNELGA EGA QOVUSHQOQ-ELASTIK YARIM FAZONING KUCHLANGANLIK-DEFORMATSIYA HOLATI VA UNDA TO'LQINLARNING TARQALISHI

Annotatsiya. *O'qi erkin sirtga parallel ravishda muayyan chuqurlikda joylashgan silindrik bo'shliqqa (qoplamasiz tunnelga) ega chiziqli qovushqoq-elastik, bir jinsli va izotrop yarim fazoning kuchlanish-deformatsiya holati masalasi tadqiq etiladi. Bo'shliq konturiga Reley to'lqini tezligidan kichik bo'lgan doimiy tovushosti tezlik bilan tekis harakatlanuvchi normal yoki urinma yuk qo'yilgan. Qovushqoq-elastiklik dinamik nazariyasining fazoviy chegaraviy masalasi doirasida to'lqin potensiallarini yassi to'lqinlar bo'yicha yoyish, to'lqin maydonlarining superpozitsiya prinsipi va ularni silindrik funksiyalar bo'yicha qatorlarga qayta yoyishga asoslangan aniq analitik yechim qurilgan. Ushbu yondashuv muhitni fazoviy diskretlashtirmasdan, to'lqinlarning yer sirtidan ko'p marta qaytishi va bo'shliq konturida sochilishi jarayonlarini aniq hisobga olish imkonini beradi. Dinamik kuchlanishlar va ko'chishlarning yuk harakati tezligiga, bo'shliqning joylashish chuqurligiga hamda muhitning qovushqoq-elastik parametrlariga bog'liq holda taqsimlanish qonuniyatlari aniqlangan. Olingan natijalar kichik transport tunnellarining dinamik mustahkamligini baholash uchun etalon bo'lib xizmat qilishi mumkin.*

Kalit so'zlar: *qovushqoq-elastik yarim fazo, qoplamasiz tunnel, harakatlanuvchi yuk, to'lqinlar difraksiyasi, kuchlanish-deformatsiya holati, analitik yechim, silindrik to'lqin potensiali.*

STRESS-DEFORMED STATE AND WAVE SCATTERING IN A VISCOELASTIC HALF-SPACE WITH AN UNLINED CYLINDRICAL TUNNEL UNDER A MOVING LOAD

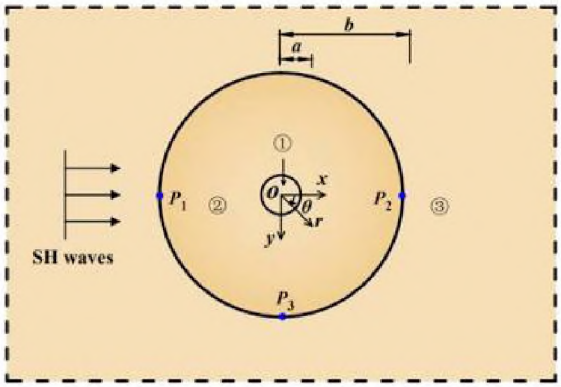
Annotation. *The problem of the stress-strain state of a linear-viscoelastic homogeneous isotropic half-space with a cylindrical cavity (unsupported tunnel) of radius, located at a depth parallel to the free surface, is studied. The cavity contour is subject to a normal or shear load, uniformly moving at a constant subsonic speed (less than the Rayleigh wave speed). Within the framework of the spatial boundary value problem of the dynamic theory of viscoelasticity, an exact analytical solution was constructed based on the expansion of wave potentials in plane waves, the principle of superposition of wave fields and their reexpansion into series in cylindrical functions. This approach makes it possible to accurately take into account the processes of multiple reflection of waves from the day surface and their scattering on the contour of the hole without using spatial discretization of the medium. Patterns of distribution of dynamic stresses and displacements depending on the loading speed, cavity depth and viscoelastic parameters of the medium were revealed. The obtained results serve as a basic standard for assessing the dynamic strength of small transport tunnels.*

Keywords: *Viscoelastic half-space, unlined tunnel, moving load, wave diffraction, stress-deformed state, analytical solution, cylindrical wave potential.*

Введение. Оценка динамического напряжённо-деформированного состояния подземных сооружений является важной задачей механики деформируемого твёрдого тела. При воздействии движущихся нагрузок в окружающем массиве возникают волновые процессы, определяющие распределение напряжений и перемещений вблизи выработки. Для тоннелей без обделки особое значение имеет поведение непосредственно прилегающей к полости среды, поскольку восприятие нагрузки обеспечивается самим массивом. При этом характер динамического отклика зависит от скорости движения нагрузки, глубины заложения тоннеля и механических свойств окружающей среды.

Цель работы заключается в построении аналитического решения указанной задачи и выявлении закономерностей изменения динамических напряжений и перемещений в зависимости от скорости движения нагрузки, глубины заложения полости и вязкоупругих параметров материала. Для достижения этой цели используются разложения волновых потенциалов по плоским волнам, принцип суперпозиции и переход к рядам по цилиндрическим функциям. Разрабатываемое решение позволяет учитывать многократные отражения и рассеяние волн без пространственной дискретизации среды.

Методология и метод решения



1-рисунок. Рассеяние волновых полей в окрестности полости.

Переход в подвижную систему координат: Так как нагрузка P движется с постоянной скоростью c вдоль оси Z, задача сводится к квазистационарной в подвижной системе координат (ρ,θ,ξ), где:

$$\xi = z - ct$$

Волновые уравнения для скалярного Φ и векторного $\vec{\Psi} = (0,0,\Psi)$ потенциалов перемещений в подвижной системе координат принимают вид:

$$\Delta\Phi - \frac{c^2}{c_p^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} = 0, \quad \Delta\Psi - \frac{c^2}{c_s^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} = 0$$

где c_p и c_s – комплекснозначные скорости продольных и поперечных волн в вязкоупругой среде, определяемые с учётом интегральных операторов релаксации:

$$c_p^2 = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho_0}, \quad c_s^2 = \frac{\mu^*}{\rho_0}$$

Потенциальное представление волновых полей: Потенциалы перемещений представляются в виде суммы первичных волн, излучаемых источником на контуре тоннеля, и вторичных (отражённых) волн от плоской границы

x = h:

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}, \quad \Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)}$$

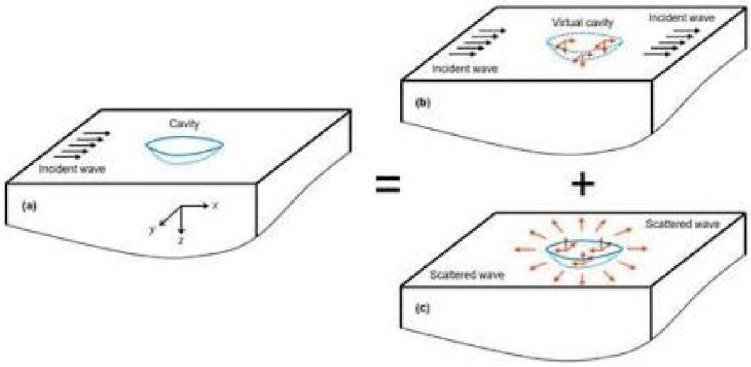
Первичные потенциалы ($\Phi^{(0)}, \Psi^{(0)}$) описывают волны, распространяющиеся от цилиндрической полости в бесконечную среду, и раскладываются в ряды по цилиндрическим функциям Ганкеля первого или второго рода $H_n^{(1,2)}(kr)$

$$\Phi^{(0)}(r,\theta,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(k)H_n^{(1)}(\alpha r)e^{in\theta}e^{ik\xi}dk$$

где $\alpha = \sqrt{k^2(c^2/c_p^2 - 1)}$ – волновое число для продольных волн.

Отражённые потенциалы ($\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)}$) представляют собой волны, отражённые от плоской границы $x = h$, и первоначально записываются в виде интегралов Фурье по плоским волнам:

$$\Phi^{(1)}(x,y,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(\gamma,k)e^{-\eta x + i\gamma y + ik\xi}d\gamma dk$$



2-рисунок. Отражение волн между плоской границей и цилиндрической полостью.

Связка граничных условий методом переразложения: г лавная математическая сложность заключается в совмещении двух разных геометрий: цилиндрической (поверхность тоннеля $r = R$) и плоской (поверхность земли $x = h$).

Для удовлетворения граничным условиям выполняется метод переразложения плоских волн в цилиндрические:

$$e^{-\eta x + i\gamma y} = e^{-\eta h}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m I_m(\kappa r)e^{im(\theta-\phi)}$$

где I_m – модифицированные функции Бесселя, $\kappa = \sqrt{\eta^2 + \gamma^2}$.

1. На свободной границе ($x = h$): Условия отсутствия напряжений $\sigma_{xx} = 0, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0$ позволяют выразить коэффициенты отражённых плоских волн $B(\gamma,k)$ через коэффициенты падающих цилиндрических волн $A_n(k)$.

2. На контуре тоннеля ($r = R$): Условия заданного подвижного давления $\sigma_{rr} = -P(\theta,\xi)$ приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов $A_n(k)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{mn}(k)A_n(k) = P_m(k)$$

Выводы. Благодаря быстрому убыванию элементов матрицы K_{mn} вне главной диагонали, полученная БСЛАУ редукцируется и эффективно решается методом численного усечения с высокой точностью.

Список использованной литературы:

(1). Eringen A.C., Suhubi E.S. (1975). Elastodynamics: Linear theory (Vol. 2). Academic Press.

(2). Pao Y.H., Mow C.C. (1973). Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. Crane Russak & Company.

(3). Lu J.F., Jeng D.S. (2004). A semi-analytical method for dynamic response of a 3D tunnel in a saturated half-space. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 28(1), p. 57–81.

(4). Yang Y., Kou X. (2019). Scattering of plane SH-waves by a shallow circular tunnel in an elastic half-space. Applied Mathematical Modelling, 68, p. 432–448.

(5). Fang J., Jin B. (2021). Dynamic response of a cylindrical cavity in a viscoelastic medium under moving loads. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 142, 106540.

(6). Q.Li, C.Wang, P.Wang, M.Luo, HWang, and Y.Lu. "Dynamic response behaviors of buried pipelines subjected to the impact of spherical falling objects in cold regions," Journal of Vibroengineering, Vol. 27, № 4, pp. 655–668, Jun. 2025, https://doi.org/10.21595/jve.2025.24679

(7). Sh.N.Almuratov, J.Shomurodov, O.Savenko, N.Toshboyeva. VIBROENGINEERING PROCEDIA. 76th International Conference on Vibroengineering in Tashkent, Uzbekistan, April 28–29, 2026. DOI https://doi.org/101. .21595/vp.2026.26327