Qodirova Marhabo (Osyo Xalqaro universiteti Xorazm filiali magistranti)

KASR TARTIBLI SUBDIFFUZIYA TENGLAMASI: TUSHUNCHALAR, NAZARIY ASOSLAR VA MATEMATIK MODELLAR

Annotatsiya. *Ushbu maqolada anomaliy diffuziya jarayonlarini tavsiflashda qo'llaniladigan kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi o'rganiladi. Klassik diffuziya modellarining murakkab muhitlar uchun yetarli emasligi asoslanadi va vaqt bo'yicha kasr tartibli hosilalar yordamida subdiffuziya hodisasini matematik ifodalash imkoniyatlari yoritiladi. Caputo turidagi kasr hosila asosida tuzilgan subdiffuziya tenglamasining fizik mazmuni, kelib chiqish manbalari hamda amaliy qo'llanilishi tahlil qilinadi.*

Kalit so'zlar: *kasr tartibli hosila, subdiffuziya, anomaliy diffuziya, Caputo hosilasi, matematik modellashtirish.*

Кодирова Мархабо (магистрант Хорезмского филиала Азиатского международного университета)

ДРОБНО-ПОРЯДКОВОЕ УРАВНЕНИЕ СУБДИФФУЗИИ: ПОНЯТИЯ, ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Аннотация. *В статье рассматривается дробно-порядковое уравнение субдиффузии, применяемое для описания процессов аномальной диффузии. Обосновывается недостаточность классических моделей диффузии для сложных сред и показаны возможности математического описания явления субдиффузии с использованием дробных производных по времени. Анализируются физический смысл, источники возникновения и практические применения уравнения субдиффузии, построенного на основе дробной производной типа Капуто.*

Ключевые слова: *дробная производная, субдиффузия, аномальная диффузия, производная Капуто, математическое моделирование.*

Qodirova Marhabo (Master's student of the Khorezm branch of the Asian International University)

FRACTIONAL-ORDER SUBDIFFUSION EQUATION: CONCEPTS, THEORETICAL FOUNDATIONS, AND MATHEMATICAL MODELS

Annotation. *This paper examines the fractional-order subdiffusion equation used to describe anomalous diffusion processes. The limitations of classical diffusion models for complex media are justified, and the possibilities of mathematically representing the subdiffusion phenomenon using time-fractional derivatives are discussed. The physical interpretation, origins, and practical applications of the subdiffusion equation formulated with the Caputo-type fractional derivative are analyzed.*

Keywords: *fractional derivative, subdiffusion, anomalous diffusion, Caputo derivative, mathematical modeling.*

Kirish (Introduction). Diffuziya hodisasi moddalarning tasodifiy harakati natijasida makon bo'ylab tarqalishini ifodalaydi va ko'plab tabiiy hamda texnik jarayonlarning asosini tashkil etadi. Klassik yondashuvda bunday jarayonlar Fik qonuni asosida tuzilgan diffuziya tenglamasi orqali modellashtiriladi. Biroq tajribalar shuni ko'rsatadiki, murakkab strukturalarga ega muhitlarda zarrachalar harakati bu modelga to'liq bo'ysunmaydi.

Ayniqsa, g'ovak jismlar, biologik to'qimalar va notekis muhitlarda diffuziya jarayoni sekinlashib, anomaliy diffuziya holati yuzaga keladi. Ushbu jarayonning muhim ko'rinishlaridan biri subdiffuziya bo'lib, unda zarrachalarning tarqalish tezligi vaqtga nisbatan sustroq o'sadi [1;35-b.]. Bunday hodisalarni tavsiflashda kasr tartibli differensial tenglamalar samarali matematik vosita sifatida qaraladi.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili (Literature review). Kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari anomal diffuziya jarayonlarini tavsiflashda muhim matematik model hisoblanadi. Bunday jarayonlarda zarrachalarning tarqalishi klassik diffuziyaga nisbatan sekin bo'lib, bu holat murakkab va xotirali muhitlarga xosdir [2]. Subdiffuziya tenglamalarining nazariy asosi kasr tartibli hisobga borib taqaladi.

Kasr tartibli hosilalarning asosiy ta'riflari Riemann-Liouville va Caputo tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, ayniqsa, Caputo hosilasi fizik masalalarda boshlang'ich shartlarni qulay ifodalashi sababli keng qo'llaniladi [3]. Kasr tartibli differensial tenglamalarning umumiy nazariyasi Podlubny tomonidan tizimli ravishda bayon etilgan [4].

Subdiffuziya jarayonlarining ehtimollik talqini Metzler va Klafter tomonidan Continuous Time Random Walk (CTRW) modeli orqali asoslab berilgan. Ushbu yondashuv subdiffuziya tenglamalarida vaqt bo'yicha kasr tartibli hosilaning paydo bo'lishini tushuntirib beradi [1]. Mainardi va Gorenflo ishlarida fraksional diffuziya tenglamalarining fundamental yechimlari va ularning xossalari o'rganilgan [5].

Chegaralangan sohalarda subdiffuziya tenglamalarini yechish masalalari Chechkin, Sokolov va Gorenflo tomonidan tahlil qilinib, Dirichlet va Neumann chegara shartlari ostida yechimlarning xatti-harakati ko‘rsatib berilgan [6]. Ushbu tadqiqotlar doira va silindrik domenlarda subdiffuziya tenglamalarini modellashtirish uchun nazariy asos yaratadi.

Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology). Mazkur tadqiqot jarayonida kasr tartibli analizning asosiy elementlari, jumladan, Caputo va Riemann–Liuvill turidagi kasr hosilalar nazariyasi o‘rganildi hamda klassik diffuziya tenglamalari bilan kasr tartibli diffuziya modellarini qiyosiy tahlil qilish usuli qo‘llanildi. Shuningdek, mavzu bo‘yicha yetakchi xorijiy va mahalliy olimlarning ilmiy maqolalari, monografiyalari va tadqiqot ishlari tahlil qilindi. Boshlang‘ich shartlarni fizik jihatdan aniq va qulay tarzda ifodalash imkonini berishi sababli, ushbu tadqiqotda Caputo turidagi kasr hosila asosiy matematik operator sifatida tanlandi [3;36-b.].

Tahlil va natijalar (Analysis and results). Normal diffuziya va subdiffuziya farqi. Normal diffuziya jarayonida zarrachalarning o‘rtacha kvadrat siljishi vaqt bilan chiziqli bog‘langan bo‘ladi:

$$\langle x^2(t)\rangle = Ct$$

bu yerda C – musbat doimiy son.

Subdiffuziya holatida esa ushbu bog‘lanish quyidagi ko‘rinishga ega: $\langle x^2(t)\rangle = Ct^\alpha$ $0<\alpha<1$.

Bu tenglama zarrachalarning muhit bo‘ylab sekin tarqalishini ifodalaydi va α ko‘rsatkich jarayonning subdiffuzion darajasini belgilaydi [4;37-b.].

Kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi. Klassik diffuziya tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

bu yerda: u (x,t) – zichlik funksiyasi, D – diffuziya koeffitsiyenti.

Subdiffuziya jarayonlarini modellashtirishda vaqt bo‘yicha oddiy hosila kasr tartibli hosila bilan almashtiriladi:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<\alpha<1.$$

Ushbu tenglama kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi deb ataladi va xotira effektlarini hisobga oladi [1;40-b.].

Caputo kasr hosilasining ta’rifi. Caputo kasr hosilasi quyidagi integral ko‘rinishda aniqlanadi:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds, \quad 0<\alpha<1.$$

Mazkur ta’rifdan ko‘rinadiki, funksiyaning hozirgi qiymati oldingi barcha vaqt nuqtalaridagi holatlarga bog‘liq bo‘lib, bu subdiffuziya jarayonining xotirali tabiatini ifodalaydi [7;36-b.].

OTM darajasidagi amaliy model. Bir o‘lchamli sohada subdiffuziya jarayonini quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy masala bilan ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{0.75} u(x,t)}{\partial t^{0.75}} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Bu model, masalan, g‘ovak materiallarda issiqlik yoki moddaning sekin tarqalishini tavsiflaydi.

Kasr tartibli subdiffuziya tenglamasining ikki o‘lchamli (polar koordinatalarda) modeli. Bir o‘lchamli subdiffuziya modellari bilan bir qatorda, murakkab geometrik sohalarda jarayonni chuqurroq tahlil qilish maqsadida ikki o‘lchamli modellarni ko‘rib chiqish muhim ahamiyatga ega. Xususan, doira shaklidagi sohalar uchun subdiffuziya jarayonini polar koordinatalarda ifodalash qulay hisoblanadi.

Bu holda kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial^\alpha T(r,\varphi,t)}{\partial t^\alpha} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right) + \Phi(r,\varphi,t), \quad 0<\alpha\le 2.$$

Boshlang‘ich shartlar quyidagicha aniqlanadi:

$$t = 0: \quad T(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \qquad 0 < \alpha \leq 2,$$

$$t = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial t}(r, \varphi, 0) = F(r, \varphi), \qquad 1 < \alpha \leq 2.$$

Chegarada esa Dirichlet turidagi shart qo‘yiladi:

$$r = R: \quad T(R, \varphi, t) = g(\varphi, t).$$

Mazkur boshlang‘ich-chegaraviy masalaning yechimi Green funksiyalari yordamida integral ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, t) = & \int_0^{2\pi} \int_0^R f(\rho, \phi)\, G_f(r, \varphi, \rho, \phi, t)\, \rho\, d\rho\, d\phi \\ & + \int_0^{2\pi} \int_0^R F(\rho, \phi)\, G_F(r, \varphi, \rho, \phi, t)\, \rho\, d\rho\, d\phi \\ & + \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi(\rho, \phi, \tau)\, G_\Phi(r, \varphi, \rho, \phi, t - \tau)\, \rho\, d\rho\, d\phi\, d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^{2\pi} g(\phi, \tau)\, G_g(r, \varphi, \phi, t - \tau)\, d\phi\, d\tau. \end{aligned}$$

[8;256-b.]

Fundamental yechimlar vaqt bo‘yicha Laplas o‘zgartirishi, burchak koordinata bo‘yicha Furye qatori va radius bo‘yicha Hankel o‘zgartirishi yordamida aniqlanadi. Natijada yechim Bessel funksiyalari $J_n(\cdot)$ hamda Mittag–Leffler funksiyalari orqali ifodalanadi. Bu esa subdiffuziya jarayonining xotirali va no-lokal xususiyatlarini matematik jihatdan aniq ifodalash imkonini beradi.

Kasr tartibli subdiffuziya tenglamalarining nazariy asoslari statistik fizika doirasida shakllangan bo‘lib, ular uzluksiz vaqtli tasodifiy yurish (Continuous Time Random Walk – CTRW) modeli bilan chambarchas bog‘liqdir. Ushbu modelda zarrachalarning harakati fazoda tasodifiy siljishlar bilan bir qatorda, siljishlar orasidagi kutish vaqtlarining tasodifiyligi orqali ham tavsiflanadi. Agar kutish vaqtlarining taqsimoti og‘ir dumli bo‘lib, o‘rtacha kutish vaqti cheksiz bo‘lsa, diffuziya jarayoni klassik qonuniyatlarga bo‘ysunmay, subdiffuzion xarakter kasb etadi [4;37-b.].

R.Metzler va J.Klafter tomonidan olib borilgan fundamental tadqiqotlarda CTRW modeli asosida subdiffuziya jarayonlarini kasr tartibli differensial tenglamalar orqali ifodalash mumkinligi ko‘rsatib berilgan. Ular vaqt bo‘yicha kasr tartibli hosilaning kiritilishi zarrachalar harakatidagi xotira effektlarini matematik jihatdan aniq ifodalashini asoslab berganlar [4;37-b.]. Aynan shu yondashuv kasr tartibli subdiffuziya tenglamalarining fizik mazmunini tushuntirishda muhim ahamiyatga ega.

Mazkur ishda subdiffuziya jarayonining ikki o‘lchamli modeli polar koordinatalarda ko‘rib chiqilib, jarayon geometriyasining diffuziya xususiyatlariga sezilarli ta’siri namoyon etildi. Xususan, Dirichlet chegaraviy shartlar orqali soha chegarasida funksiyaning qiymatini belgilash real fizik tizimlarda tashqi muhit bilan o‘zaro ta’sirni modellashtirish imkonini beradi. Yechimning Green funksiyalari yordamida ifodalanishi subdiffuziya jarayoniga boshlang‘ich shartlar, tashqi manbalar va chegaraviy ta’sirlarning hissasini alohida tahlil qilishga imkon yaratadi.

$$E_{\alpha,\beta}(-a\xi_{nk}^2 t^\alpha)$$

Yechim tarkibida Mittag–Leffler funksiyalarining

ko‘rinishida paydo bo‘lishi jarayonning kasr tartibli va xotirali tabiatini ifodalaydi. Ushbu funksiyalar klassik diffuziya tenglamalarida uchraydigan eksponensial yechimlarning umumlashmasi bo‘lib, subdiffuziyada kuzatiladigan sekinlashgan tarqalish jarayonini matematik jihatdan asoslaydi. Shu bilan birga, Bessel funksiyalarining

$$J_n(r\xi_{nk})$$

yechim tarkibida ishtirok etishi masalaning doira shaklidagi soha bilan bog‘liq geometrik simmetriyasini aks ettirib, subdiffuziya jarayonining fazoviy taqsimotini chuqurroq tahlil qilish imkonini beradi.

So‘nggi yillarda kasr tartibli subdiffuziya tenglamalarini o‘rganish yo‘nalishida O‘zbekiston olimlari tomonidan ham muhim ilmiy natijalar qo‘lga kiritildi. Jumladan, R.R.Ashurov va M.D.Shakarova Caputo turidagi kasr hosilali subdiffuziya tenglamalari uchun teskari masalalarni o‘rganib, ularning yechimlari mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi shartlarini tahlil qilganlar [9;38-b.]. Ushbu natijalar kasr tartibli modellarning nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhim ekanligini tasdiqlaydi.

Umuman olganda, CTRW modeli va unga asoslangan polar koordinatalardagi kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari murakkab, xotirali va no-lokal jarayonlarni modellashtirish uchun kuchli matematik asos yaratadi hamda fizik, biologik va muhandislik tizimlarida keng qo‘llanish imkoniyatiga ega [4;37-b.].

Xulosa (Conclusion). Kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi murakkab, no-lokal va xotirali muhitlarda sodir bo‘ladigan diffuziya jarayonlarini tavsiflash uchun samarali va universal matematik model hisoblanadi. Mazkur tenglama klassik diffuziya tenglamalaridan farqli ravishda jarayonning faqat hozirgi holatini emas, balki uning oldingi vaqt nuqtalaridagi holatlarini ham inobatga oladi. Shu jihati bilan u anomaliy diffuziya hodisalarini, xususan, subdiffuziya jarayonlarini yanada aniq va chuqurroq tavsiflash imkonini beradi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, vaqt bo‘yicha kasr tartibli hosilalarning qo‘llanilishi diffuziya jarayonidagi sekinlashuv va xotira effektlarini matematik jihatdan izohlashda muhim ahamiyatga ega. Caputo turidagi kasr hosiladan foydalanish esa boshlang‘ich shartlarni fizik ma’noda qulay ifodalash imkonini berib, subdiffuziya tenglamalarini amaliy masalalarda qo‘llashni osonlashtiradi. Bu holat kasr tartibli modellarni real fizik va texnik jarayonlarga tatbiq etish imkoniyatlarini kengaytiradi. Shuningdek, kasr tartibli subdiffuziya tenglamalarining nazariy jihatdan o‘rganilishi, jumladan yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalari zamonaviy matematik tahlilning muhim yo‘nalishlaridan biri ekanligini ko‘rsatadi. Ushbu tenglamalar asosida qurilgan modellar fizika, biologiya, kimyo va muhandislik fanlarida uchraydigan murakkab jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llanilishi mumkin.

Magistratura bosqichida kasr tartibli subdiffuziya tenglamalarini o‘rganish talabalarga zamonaviy differensial tenglamalar nazariyasini chuqur egallash, matematik fizikaning dolzarb masalalarini tushunish hamda ilmiy tadqiqot faoliyatiga tayyorlanishda mustahkam nazariy asos yaratadi. Shu sababli ushbu mavzu kelgusidagi ilmiy izlanishlar va amaliy tadqiqotlar uchun muhim va istiqbolli yo‘nalishlardan biri hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999, p. 33–36.

(2). Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, 2000.

(3). Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Geophys. J. Int., 1967.

(4). Metzler R., Klafter J. The random walk’s guide to anomalous diffusion. Physics Reports. 2000, Vol. 339, №1, p. 1–77.

(5). Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. London, Imperial College Press, 2010, p. 58–62.

(6). Chechkin A.V., Sokolov I.M., Gorenflo R. Fractional diffusion in bounded domains. J.Phys. A, 2002.

(7). Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006, p. 41–45.

(8). Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers. Y.Povstenko. Cham: Springer (Birkhäuser), 2015, 460 p.

(9). Ashurov R.R., Shakarova M.D. Inverse problem for subdiffusion equation with fractional Caputo derivative. Ufa Mathematical Journal. 2024, Vol. 16, № 1, p. 112–126.

Jumanazarova Hafiza (Osiyo xalqaro universiteti magistranti; e-mail: hafizajumanazarova12@gmail.com)

BIR O‘LCHAMLI SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN QO‘YILGAN BOSHLANG‘ICH-CHEGARAVIY MASALANI YECHISH

Annotatsiya. *Mazkur maqolada bir o‘lchamli superdiffuziya tenglamasi uchun qo‘yilgan boshlang‘ich–chegaraviy masalani yechish masalasi batafsil tadqiq etilgan. Tadqiqotda vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha Riman–Liuvill tipidagi kasr tartibli hosila ishtirok etuvchi superdiffuziya tenglamasi qaraladi. Bunday tenglamalar anomal diffuziya jarayonlarini modellashtirishda muhim ahamiyatga ega bo‘lib, klassik diffuziya tenglamalaridan farqli ravishda murakkab fizik va matematik xossalarga ega.*

Kalit so‘zlar: *kasr tartibli hosila, Riman–Liuvill hosilasi, superdiffuziya tenglamasi, boshlang‘ich–chegaraviy masala, Dyuamel prinsipi, Grin funksiyasi, Mittag–Leffler funksiyasi, anomal diffuziya.*

Джуманазарова Хафиза (магистрант Международного Азиатского университета; e-mail: hafizajumanazarova12@gmail.com)

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СУПЕРДИФФУЗИИ

Аннотация. *В данной статье подробно исследуется задача решения начально–краевой задачи для одномерного уравнения супердиффузии. В исследовании рассматривается уравнение супердиффузии с дробной производной по времени типа Римана–Лиувилля. Такие уравнения имеют*