Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Grötzsch H. Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erueiterung des Picardschen Satzes. Ber. Verh.Sächs. Acad. Wiss., Leipzig, 1928. Bd. 80.-S.503-507.

(2). Шабат Б.В. К теории квазиконформных отображений в пространстве. Докл. АН СССР, 1960, т.132, № 5, с. 1045–1048.

(3). Султанов Б.Ю. О равенстве некоторых конформных инвариантов на римановых многообразиях //Алгебра и дискретная математика. Новосибирск, 1989, с. 78–88.

(4). B.Y.Sultanov. Trapetsiyadagi chiziqlar oilasining moduli. O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi Berdaq nomidagi qaraqalpaq davlat universiteti «Matematika, amaliy matematika va informatsion texnologiyalarning dolzarb masdalalari» mavzusidagi Respublika ilimiy-amaliy konferensiyasi, Nukus. 2026-yıl, 1–2-may, tom I, 61–63-betlar.

Ismoilov Muxiddin Baxrom o‘g‘li (O‘zbekiston xalqaro Islomshunoslik akademiyasi “Zamonaviy axborot kommunikatsiya texnologiyalari” kafedrasi katta o‘qituvchisi; mukhiddin4449@gmail.com),
Ahmedov Qurbonbay Yuldashbayevich (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasi katta o‘qituvchisi; qurbonbayaxmedov@urdu.uz),
Jumaniyozova Xayriniso Xamidbek qizi (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti matematika matematik analiz mutaxassisligi 2-bosqich magistranti; hayrinisojumaniyozova@gmail.com)

MAKSIMAL m-PLYURISUBGARMONIK FUNKSIYALAR

Annotatsiya. *Maqolada m-plyurisubgarmonik va m-subgarmonik funksiyalar sinflari va ularning o‘zaro aloqasi tahlil qilingan. Maksimal m-plyurisubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi asosida fundamental teoremalarning analoglari isbot qilingan. Bu teoremalarni isbot qilishda m-plyurisubgarmonik funksiyalar orasidagi bog‘lanishdan, ya’ni, haqiqiy fazoni kompleks fazoga kengaytirishdan foydalanilgan. Bundan tashqari, maksimallikni ta’minlovchi yetarli shartlar keltirilib, nazariy natijalarga aniq misol keltirilgan.*

Kalit so‘zlar: *m - o‘lchamli tekisliklar, garmonik funksiyalar, subgarmonik funksiyalar, plyurisubgarmonik funksiyalar, m-subgarmonik funksiyalar, m-plyurisubgarmonik funksiyalar, maksimal m-plyurisubgarmonik funksiyalar.*

МАКСИМАЛЬНЫЕ m-ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Аннотация. *В статье исследуются классы m-плюрисубгармонических и m-субгармонических функций, а также анализируется их взаимосвязь. Для максимальных m-плюрисубгармонических функций доказаны аналоги фундаментальных теорем на основе принципа максимума. При доказательстве данных теорем была использована взаимосвязь между рассматриваемыми функциями, а именно вложения вещественного пространства в комплексное пространство. Кроме того, сформулированы достаточные условия, обеспечивающие максимальность, и приведён пример, иллюстрирующий полученные теоретические результаты.*

Ключевые слова: *m - мерная плоскость, гармонические функции, субгармонические функции, плюрисубгармонические функции, m - плюрисубгармонические функции, максимальные m - плюрисубгармонические функции.*

MAXIMAL m-PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

Annotation. *The article analyzes the classes of m-plurisubharmonic and m-subharmonic functions and their interrelations. Analogues of fundamental theorems for maximal m-plurisubharmonic functions are proved based on the maximum principle. In proving these theorems, the relationship between these functions is used, namely, the embedding of real space into a complex space. In addition, sufficient conditions ensuring maximality are given and an example of theoretical results is given.*

Key words: *m - measure plane, harmonic functions, subharmonic functions, plurisubharmonic functions, m-subharmonic functions, m-plurisubharmonic functions, maximal m-plurisubharmonic functions.*

Kirish. Ma’lumki, $\mathbb{R}^n$ fazoda m-o‘lchamli haqiqiy tekisliklar bilan kesimlarida subgarmoniklik xossasiga ega bo‘lgan funksiyalar sinfi zamonaviy qavariq geometriyaning muhim tadqiqot obyektlaridan biri hisoblanadi. Ushbu yo‘nalishda muhim natijalar R Harvi va B.Lauson, shuningdek, F.Forstnerich va boshqa matematik olimlar tomonidan olingan (6–11). Ushbu mualliflar ishlarida $\mathbb{R}^n$ Yevklid fazosidagi m-o‘lchamli haqiqiy tekisliklarda subgarmonik bo‘ladigan funksiyalar sinfi o‘rganilib, ular m-plyuri-

subgarmonik funksiyalar deb atalgan. Bu funksiyalar keyinchalik qavariq geometriyada, xususan geometrik jismlarning qavariq qobig'ini tavsiflashda samarali qo'llanilgan.

Bundan tashqari, R.Harvi va B.Lausonlar tomonidan yanada umumiyroq hol φ-plyurisubgarmonik funksiyalar tushunchasi kiritilgan bo'lib, ular M Riman ko'pxilliklarida berilgan yopiq φ-forma yordamida aniqlanadi. Ushbu funksiyalar sinfi va ularning xossalari kalibrlangan geometriyada muhim ahamiyat kasb etadi. So'nggi paytlarda $\mathbb{C}^n$ ta kompleks fazoda m-subgarmonik funksiyalar nazariyasi ham jadal rivojlanmoqda. Bu funksiyalar m-o'lchamli kompleks tekisliklarda subgarmoniklik xossasiga ega bo'lishi bilan xarakterlanadi. Bu borada D.Joyce [12], M.Verbitsky [13] hamda A.Sadullayev va B.Abdullayev [1-5] ishlarining o'rni alohida ahamiyatga ega. Ushbu ishda m-plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida maksimal funksiyalarni m-subgarmonik funksiyalar yordamida o'rganiladi.

1. m-plyurisubgarmonik va m-subgarmonik funksiyalar. $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan yuqoridan yarim uzluksiz $u(x)$ funksiyani qaraylik. Agar bu funksiyaning $\mathbb{R}^n$ fazodagi ixtiyoriy Π tekislikka (bu yerda $\dim \Pi = m,\ (1 \le m \le n)$ qisqartmasi, ya'ni, $u|_{\Pi}$, $D \bigcap \Pi$ kesishmada subgarmonik funksiya bo'lsa, u holda $u(x)$ ga m-plyurisubgarmonik funksiya deb ataladi.

Bunday funksiyalar sinfi, odatda, $m - psh(D)$ bilan belgilanadi. Qulaylik nuqtayi nazaridan, $u(x) \equiv -\infty$ funksiya ham ushbu sinfga kiritiladi.

Ma'lumki, m-plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi, $m = 1$ bo'lganda bu sinf qavariq funksiyalar sinfi bilan ustma-ust tushadi. Umuman olganda, quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$cv = 1 - psh \subset 2 - psh \subset \cdots \subset m - psh \subset \cdots \subset n - psh = sh,$$

ya'ni, o'lcham ortishi bilan mos ravishda funksiyalar sinfi kengayib boradi va $m = n$ holatda subgarmonik funksiyalar sinfiga kelib taqaladi.

Shuningdek, agar $u(x) \not\equiv -\infty$ va $u \in m - psh(D)$ bo'lsa, u holda bu funksiya muhim analitik xossalardan biriga ega, u lokal integrallanuvchidir, ya'ni $u \in L^1_{loc}(D)$.

Shunday qilib, m-plyurisubgarmonik funksiyalar tushunchasi klassik qavariq va subgarmonik funksiyalar nazariyasini umumlashtiradi hamda ko'p o'lchamli fazolarda geometrik va analitik masalalarni tadqiq qilishda samarali vosita hisoblanadi.

$\mathbb{R}^n$ fazoda m-plyurisubgarmonik funksiyalar $\mathbb{C}^n$ kompleks fazosidagi m-subgarmonik funksiyalarning haqiqiy analogi hisoblanadi. Eslatib o'tamiz, *agar* $u(z)$ *funksiya* $D \subset \mathbb{C}^n$ *sohada aniqlangan bo'lib, u yuqoridan yarim uzluksiz va har qanday* $\prod \subset \mathbb{R}^n$ *kompleks tekislik uchun* (*bu yerda* $\dim_{\mathbb{C}} \prod = m,\ 1 \le m \le n$) *uning* $u|_{\prod}$ *qisqartmasi* $D \bigcap \prod$ *da subgarmonik funksiya bo'lsa, u holda* $u(z)$ *funksiya* D *sohada* m*-subgarmonik funksiya deyiladi.*

m-subgarmonik funksiya sinfi, odatda, $m - sh(D)$ bilan belgilanadi, ya'ni $u(z) \in m - sh(D),\ D \subset \mathbb{C}^n$.

Agar $u(z) \in m - sh(D) \bigcap C^2(D)$ bo'lsa, $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_n(z)$ sonlar $\left(\dfrac{\partial^2 u(z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right)$ Ermit matritsasining xos qiymatlari bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$dd^c u \wedge \left(dd^c |z|^2 \right)^{m-1} = \left(\frac{i}{2} \right)^m \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_m \le n} \left(\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_m} \right) dz_{j_1} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_m} \wedge d\overline{z}_{j_m}. \quad (1)$$

Koordinatali $\prod = \left\{ z_{j_1}, \ldots, z_{j_m} \right\}$ tekislik uchun $u|_{\prod}$ funksiyaning subgarmonikligidan $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_m} \ge 0,\ \ 1 \le j_1 < \ldots < j_m \le n$ kelib chiqadi. Bu esa shuni anglatadiki, quyidagi

$dd^c u \wedge \left(dd|z|^2\right)^{m-1}$ differensial forma $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada musbat bo'lishini bildiradi, ya'ni $dd^c u \wedge \left(dd|z|^2\right)^{m-1} \geq 0$. Bu yerda $dd^c u = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k$, $d = \partial + \overline{\partial}$ va $d^c = \frac{\partial - \overline{\partial}}{4i}$.

Agar biz $|z|^2$ funksiyani olsak, u holda: $dd^c |z|^2 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j$. Bu ifodaning n-marta tashqi ko'paytmasi: $\left(dd^c |z|^2\right)^n$ kompleks fazodagi hajm elementini beradi.

Ma'lumki, $psh = 1 - sh \subset \ldots \subset m - sh \subset \ldots \subset n - sh = sh$, ya'ni, plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi bosqichma-bosqich m-subgarmonik funksiyalar sinflari orqali umumiy subgarmonik funksiyalar sinfiga kengayadi. Shundan kelib chiqadiki, agar $u(z) \in m - sh(D)$ bo'lsa, u holda bu funksiya lokal integrallanuvchi bo'ladi, ya'ni $u(z) \in L^1_{loc}(D)$. Natijada quyidagi oqim aniqlanadi:

$$dd^c u \wedge \beta^{m-1} \circ \omega = \int u \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F^{(n-m,n-m)}(D) \tag{2}$$

bu yerda $\beta = dd^c |z|^2$ – $\mathbb{C}^n$dagi standart hajm formasi, $F^{(n-m,n-m)}(D)$ esa D sohada aniqlangan, cheksiz silliq va $(n-m,n-m)$ bidarajali differensial formalar oilasi (ya'ni finitar formalar).

Endi $u_j(z) = u \circ K_{1/j}(w - z) \downarrow u(z)$ standart approksimatsiyadan foydalansak, quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$0 \geq dd^c u_j \wedge \beta^{m-1} \circ \omega = \int u \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \to \int u_j \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \to \int u \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0,$$

$$\forall \omega \in F^{(n-m,n-m)}(D), \ \omega \geq 0$$

Shunday qilib, ixtiyoriy $u(z) \in m - sh(D)$ uchun $dd^c u \wedge \beta^{m-1}$ oqimi musbat aniqlangan, aksincha. Agar yuqoridan yarim uzluksiz $u(z)$ funksiya uchun $dd^c u \wedge \beta^{m-1}$ differensial forma umumlashgan ma'noda musbat aniqlangan bo'lsa, ya'ni $dd^c u \wedge \beta^{m-1} \geq 0$, u holda $u(z)$ funksiya albatta m-subgarmonik bo'ladi.

Ma'lumki, m-plyurisubgarmonik funksiyalar $(m - psh)$ bilan kuchli m-subgarmonik funksiyalar $(m - sh)$ o'rtasida juda muhim bog'lanish mavjud. Bu bog'lanishdan foydalanish orqali m-subgarmonik funksiyalarning xossalarini m-plyurisubgarmonik funksiyalarni o'rganishda qo'llash mumkin bo'ladi. Shu maqsadda biz haqiqiy fazo $\mathbb{R}^n$ ni mos kompleks fazo $\mathbb{C}^n_z$ ga joylaymiz. Bu yerda kompleks fazo quyidagicha ifodalanadi: $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n_y$, $z = x + iy$, ya'ni har bir kompleks nuqta z haqiqiy qism $x \in \mathbb{R}^n$ va mavhum qism $y \in \mathbb{R}^n$dan tashkil topgan. Shunday qilib, haqiqiy fazo $\mathbb{R}^n$ kompleks fazoning qism fazosi sifatida qaraladi, ya'ni $\mathbb{R}^n_x \subset \mathbb{C}^n_z$, bu yerda $\mathbb{R}^n_x$ kompleks fazoning $y = 0$ bo'lgan nuqtalar to'plamidan iborat n-o'lchamli haqiqiy qism fazosidir.

Quyida m-plyurisubgarmonik funksiya va m-subgarmonik funksiyalar orasidagi bog'liqlik haqidagi teoremani keltiramiz

1-teorema. *$D \subset \mathbb{R}^n_x$ sohada yuqoridan yarim uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiya $m - psh(D)$ bo'lishi uchun $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$ funksiya $y \in \mathbb{R}^n_y$ o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan holda $D \times i\mathbb{R}^n_y$ sohada $m - sh$ funksiya bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. $D \subset \mathbb{R}_x^n$ sohada ikki marta silliq $u(x) \in C^2(D)$ funksiyalar uchun teoremaning isboti quyidagi munosabatdan kelib chiqadi:

$$\left(\frac{\partial^2 u^c(z)}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$$

Bu esa $\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ va $\left(\frac{\partial^2 u^c(z)}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}\right)$ matritsalarining xos qiymatlari o‘zaro quyidagi munosabatda ekanligini bildiradi:

$$(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_n(x)) = 4^n(\lambda_1^c(z),\ldots,\lambda_n^c(z)).$$

Shunday qilib, $u(x) \in C^2(D)$ funksiyasi $m - psh(D)$ bo‘lishi uchun $\lambda_{j_1}(x) + \ldots + \lambda_{j_m}(x) \geq 0,\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ sharti bajarilishi zarur va yetarli.

Agar $u(x)$ funksiya $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada yuqoridan yarim uzluksiz va $u^c(z) = u(\operatorname{Re} z) \in m - sh(D \times i\mathbb{R}_y^n)$ bo‘lsa, u holda $u_j^c(z) = u^c \circ K_{1/j}(w - z)$ standart approksimatsiyasi cheksiz silliq $m - sh$ funksiyani ifodalaydi. Chunki $u_j^c(z)$ funksiya $y \in \mathbb{R}_y^n$ o‘zgaruvchiga bog‘liq emas, ya’ni $u_j^c(z) = \left[u_j^c(z)\Big|_{y=0}\right]^c$. $u_j^c(z)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $u_j^c(z)\Big|_{y=0} \in m - psh(D)$ bo‘ladi. Bundan tashqari, $u_j^c(z)\Big|_{y=0} \downarrow u(x)$, bu esa $u(x)$ funksiyaning m-plyurisubgarmonik ekanligini bildiradi.

Aytaylik, $u(x)$ funksiya $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada yuqoridan yarim uzluksiz $m - psh$ funksiya bo‘lsin. $u_j(x) = u \circ K_{1/j}(t - x)$ standart approksimatsiya $D_j = \left\{\rho(x, \partial D) > \frac{1}{j}\right\}$ sohada $C^\infty\left(D_j\right)$ sinfga tegishli $m - psh$ funksiya bo‘ladi. Binobarin, $u_j^c(z) = u_j(x) \in m - sh(D_j \times i\mathbb{R}_y^n)$ va $u_j^c(z) \downarrow u^c(z)$. Demak, $u^c(z) \in m - sh(D \times i\mathbb{R}_y^n)$. *Teorema isbotlandi.*

2-teorema. *Agar* $u(x) \in m - psh(D) \cap C^2(D)$ *bo‘lsa va* $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_n(x)$ - *simmetrik* $\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ *matritsaning xos qiymatlari bo‘lsa, u holda*

$$\lambda_{j_1}(x) + \ldots + \lambda_{j_m}(x) \geq 0, \quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n. \tag{3}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Teoremaning isboti 1-teoremadan hamda $u^c(z) \in m - sh(D \times i\mathbb{R}_y^n) \cap C^2(D \times i\mathbb{R}_y^n)$ funksiya uchun quyidagi differensial formaning

$$dd^c u \wedge \beta^{m-1} = \left(\frac{i}{2}\right)^m \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n} (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_m}) dz_{j_1} \wedge d\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge dz_{j_m} \wedge d\overline{z_m}$$

musbat bo‘lishidan kelib chiqadi.

2. Maksimal $m - psh$ **funksiyalar.** Maksimal $m - psh$ funksiyalar $\mathbb{R}^n$ dagi garmonik funksiyalarning analogi hisoblanadi.

1-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada $u(x) \in m - psh(D)$ funksiya berilgan bo'lib, shu funksiyalar sinfida maksimumlar prinsipi o'rinli bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya maksimal $m-$ plyurisubgarmonik funksiya deyiladi, ya'ni, agar $v(x) \in m - psh(D)$ funksiya uchun $\varliminf\limits_{x \to \partial D} \left(u(x) - v(x)\right) \geq 0$ bajarilsa, u holda $\forall x \in D$ da $u(x) \geq v(x)$ bo'ladi.

Maksimal funksiyalarni qulay ko'rinishlarda aniqlash imkonini beruvchi bitta oddiy tasdiqni keltiramiz.

3-teorema. Quyidagi tasdiqlar o'zaro ekvivalentdir:

1) $u(x) - D$ sohasida maksimal $m - psh$ funksiya;

2) har qanday $G \subset\subset D$ soha uchun va har qanday $v(x) \in m - psh(G)$ uchun $\varliminf\limits_{x \to \partial G} \left(u(x) - v(x)\right) \geq 0$ bo'lishidan $\forall x \in G$, $u(x) \geq v(x)$ bo'ladi;

3) har qanday $G \subset\subset D$ soha va $v(x) \in m - psh(D)$ uchun $u\big|_{\partial G} \geq v\big|_{\partial G}$ bo'lishidan $\forall x \in G$, $u(x) \geq v(x)$ bo'ladi.

Isbot. 3) $\Rightarrow$ 1). Maksimal m-plyurisubgarmonik funksiya ta'rifiga ko'ra $\varliminf\limits_{x \to \partial D} \left(u(x) - v(x)\right) \geq 0$, Demak, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, agar $dist(x, \partial D) < \delta$ bo'lsa, u holda $\forall x \in D$ da $u(x) - v(x) \geq -\varepsilon$ bo'ladi. Endi $\delta > 0$ uchun $G \subset\subset D$ ixtiyoriy kompakt sohani shunday tanlaymizki, $\partial G \subset D \setminus D_\delta$, $D_\delta = \{x \in D : dist(x, \partial D) > \delta\}$ bo'lsin. Shuning uchun ∂G da $u(x) \geq v(x) - \varepsilon$ bo'ladi. $v(x) - \varepsilon$ funksiya $m - psh$ bo'lgani uchun 3-shartga ko'ra, $u(x)\big|_{\partial G} \geq \left(v(x) - \varepsilon\right)\big|_{\partial G}$ bajarilishidan, butun G da $u(x) \geq v(x) - \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon \to 0$ da limitga o'tib, $\forall x \in G$ da $u(x) \geq v(x)$ tengsizlikni hosil qilamiz, $G \subset\subset D$ ixtiyoriy bo'lgani sababli $\forall x \in D$, $u(x) \geq v(x)$ bo'lishi kelib chiqadi.

$1) \Rightarrow 2)$ Faraz qilaylik $u(x)$ funksiya maksimal $m - psh(D)$ bo'lib, har qanday $G \subset\subset D$ soha uchun va har qanday $v(x) \in m - psh(G)$ uchun $\varliminf\limits_{x \to \partial G} \left(u(x) - v(x)\right) \geq 0$ bo'lsin. Quyidagi yordamchi funksiyani quramiz:

$$w(x) = \begin{cases} \max\{u(x), v(x)\}, & x \in G \\ u(x), & x \in D \setminus G \end{cases}.$$

Ma'lumki, $u(x) \in m - psh(G)$ va $v(x) \in m - psh(G)$ funksiyalar bo'lib, bu funksiyalarning maksimumi yana $w(x) \in m - psh(G)$ bo'ladi. Berilgan shartga ko'ra $\varliminf\limits_{x \to \partial G} \left(u(x) - w(x)\right) = 0$ bo'ladi. Demak, G da $u(x) \geq w(x)$. $w(x)$ ning aniqlanishiga ko'ra, $\forall x \in D$ da $u(x) \geq w(x)$ kelib chiqadi. Shuning uchun $\forall x \in G$ larda $u(x) \geq v(x)$ o'rinli bo'lishiga ega bo'lamiz;

$2) \Rightarrow 3)$. Faraz qilaylik $u\big|_{\partial G} \geq v\big|_{\partial G}$ bo'sin. U holda $\varliminf\limits_{x \to \partial G} \left(u(x) - v(x)\right) \geq 0$ bajariladi. 2)-shartdan $\forall x \in G$ da $u(x) \geq v(x)$ kelib chiqadi.

4-teorema. *Bizga $u(x) \in m - psh(D) \cap C^2(D)$ funksiya berilgan bo'lib, har bir $x^0 \in D$ nuqta uchun shunday $x^0 \in \Pi$, $\dim \Pi = m$ tekislik mavjud bo'lsaki, $u\big|_{\Pi}$ funksiya $\Pi \cap D$ kesishmasida garmonik bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya D da maksimal $m - psh$ funksiya bo'ladi.*

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $u(x)$ maksimal funksiya bo'lmasin. U holda shunday $G \subset\subset D$ soha va $v(x) \in m-psh(D)$ funksiya topiladiki, $u\big|_{\partial G} \geq v\big|_{\partial G}$ bo'lsa, biror $x^0 \in G$ nuqtada $u(x^0) < v(x^0)$ o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra x^0 nuqtadan o'tuvchi va $\dim \prod = m$ bo'lgan shunday $\prod$ tekisligi mavjud bo'lib, $u\big|_{\prod}$ funksiya $\prod \cap D$ da garmonik bo'lsin. $v \in m-psh(D)$ bo'lganligi sababli, $v\big|_{\prod}$ subgarmonik funksiya bo'lib, $v\big|_{\prod \cap \partial G} \leq u\big|_{\prod \cap \partial G}$ tengsizlik o'rinli. $u\big|_{\prod}$ ning garmonikligidan $\forall x \in \prod \bigcap G$ uchun $v\big|_{\prod \cap G} \leq u\big|_{\prod \cap G}$ tengsizlik bajariladi, xususan $u(x^0) \geq v(x^0)$ tengsizlikga ega bo'lamiz. Bundan ziddiyatga kelamiz. *Teorema isbotlandi.*

Misol. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ fazoda ushbu

$$u(x) = \begin{cases} \ln|x|^2, m = 2 \\ -\dfrac{1}{|x|^{m-2}}, m > 2 \end{cases} \tag{4}$$

funksiya $m-psh$ bo'ladi, shu bilan birga u $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sohada maksimal $m-psh$ funksiyadir.

$u(x)$ funksiyasining $\mathbb{R}^n$ da yarim uzluksizligi ma'lum. Uning $m-psh$ ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$ nuqtani tayinlaymiz va x^0 nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy $\prod$ tekisligini olamiz. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda, $\prod = \left\{\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = x_{m+1}^0, ..., x_n = x_n^0\right\}$ deb faraz qilamiz. U holda:

$$u\big|_{\prod} = \begin{cases} \ln\left(x_1^2 + x_2^2 + (x_3^0)^2 + ... + (x_n^0)^2\right), m = 2 \\ -\dfrac{1}{\left|x_1^2 + ... + x_m^2 + (x_{m+1}^0)^2 + ... + (x_n^0)^2\right|^{\frac{m-2}{2}}}, m > 2 \end{cases}$$

ya'ni biz $\mathbb{R}^m$ fazoda funksiya hosil qilamiz. Quyidagi ko'rinishdagi funksiyalar:

$$\begin{cases} \ln\left(x_1^2 + x_2^2 + const\right), m = 2 \\ -\dfrac{1}{\left|x_1^2 + ... + x_m^2 + const\right|^{\frac{m-2}{2}}}, m > 2 \end{cases}$$

subgarmonik funksiyalar ekanligini tekshirish qiyin emas. Binobarin, $u\big|_{\prod}$ qisqartmalari subgarmonik funksiyalardir, bu esa $u(x)$ ning $\mathbb{R}^n$ da $m-$plurisubgarmonik ekanligini isbotlaydi.

Maksimallikni isbotlash uchun $0 \in \mathbb{R}^n$ nuqtadan o'tuvchi $\prod_0 = \left\{\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0\right\}$ tekisligini va uning qisqartmasini olamiz:

$$u\big|_{\prod_0} = \begin{cases} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right), m = 2 \\ -\dfrac{1}{\left|x_1^2 + ... + x_m^2\right|^{\frac{m-2}{2}}}, m > 2 \end{cases}$$

Ammo $\mathbb{R}^n$ fazosida aniqlangan ushbu funksiya Laplas operatorining fundamental yechimi hisoblanadi. Shuning uchun u $\prod \setminus \{0\}$ da subgarmonikdir.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, $\mathbb{R}^n$ dagi ixtiyoriy $0 \in \prod$ bo'lgan $m-$o'lchovli $\prod$ tekisligi uchun, $\prod$ ni $\prod_0$ ko'rinishidagi tekislikka o'tkazuvchi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal almashtirishi mavjud. Ortogonal al-

mashtirish $\left|x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right|$ miqdorini o‘zgartirmaydi, ya’ni $\left|(Tx_1)^2+...+(Tx_n)^2\right|=\left|x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right|$. Bundan kelib chiqadiki, ixtiyoriy $0\in\Pi,\dim\Pi=m$ tekisligi uchun $u\big|_{\Pi}$ qisqartmasi $\Pi\setminus\{0\}$ to‘plamda subgarmonik funksiya bo‘ladi. 4-teoremaga ko‘ra, $u(x)$ maksimal $m-psh$ funksiya hisoblanadi.

3. Xulosa. Ishda m -plyurisubgarmonik va m -subgarmonik funksiyalar sinflari har tomonlama o‘rganilib, ularning o‘zaro bog‘liqligi o‘rganildi va bundan foydalanib, maksimal m -plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalari yoritildi. Ishda haqiqiy fazoni kompleks fazoga joylashtirish orqali $m-psh$ va $m-sh$ funksiyalar orasidagi muhim ekvivalentlik teoremasi isbotlangdi. Bu natija mazkur m-plyurisubgarmonik funksiyalarni o‘rganishda kompleks analiz usullaridan samarali foydalanish imkonini beradi. Shuningdek, maksimal m -plyurisubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipiga tayangan holda muhim natijalar olindi. Maksimallikni ta’minlovchi yetarli shartlar keltirilib, nazariy olingan natijalar va shartlarni tushinishga yordam beruvchi aniq misol korsatilgan. Maqolada olingan natijalar m -plyurisubgarmonik funksiyalar nazariyasini yanada rivojlantirishga xizmat qiladi hamda ko‘p o‘lchamli analiz va qavariq geometriyada yuzaga keladigan masalalarni tadqiq etishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademic Publishing, 2012, 316 с.

(2). Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А., m –субгармонические функции во всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Функции Грина. “Узбекский математический журнал”, Ташкент, 2013, № 3, с. 3 – 8.

(3). Abdullaev B.I., Imomkulov S.A., Sharipov R.A. Removable singular sets of m-subharmonic functions. Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory, Springer Proceedings in Mathematics&Statistics. V. 264, 2018, p. 1–11.

(4). Abdullayev B.I., Subharmonic functions on complex Hyperplanes of $\mathbb{C}^n$.Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, Krasnoyarsk, 2013, № 6(4), p. 409–416.

(5). Sadullaev A. Further developments of the pluripotential theory (survey) // in Algebra, complex analysis, and pluripotential theory, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 264(2018), p. 167–182.

(6). Drnovšek B., Forstnerič F. Minimal hulls of compact sets in $\mathbb{R}^3$ //Trans. Amer. Math. Soc., 368(2016), pp. 7477–7506.

(7). Harvey F.R. and Lawson H.B. Jr., An introduction to potential theory in calibrated geometry. Amer. J. Math. 131, 4(2009), pp. 893–944.

(8). Harvey F.R. and Lawson H.B Jr. Duality of positive currents and plurisubharmonic functions in calibrated geometry. Amer. J.Math. 131. 5(2009), pp. 1211–1240.

(9). Harvey F.R. and Lawson H.B. Jr., Geometric plurisubharmonicity and convexity – an introduction. Advances in Mathematics 230 (2012), pp. 2428–2456.

(10). Harvey F.R. and Lawson H.B. Jr., Plurisubharmonicity in a general geometric context. Geometry and Analysis, 1(2010), pp. 363–401.

(11). Harvey F.R. and Lawson H.B. Jr., Calibrated geometries. Acta Mathematica, 148(1982), pp. 47–157.

(12). Joyce D., Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. Oxford University Press, USA, 2007, 318 p.

(13). Verbitsky M. Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and q−convexity. Mathematische Zeitschrift, v. 264, 2010, №4, pp. 939–957.

Kamolov Xursandbek Qurolboyevich (V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Xorazm bo‘limi katta ilmiy xodimi; xkamolov@mail.ru),

Quchkarboyev Otaxon (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti magistranti)

BA’ZI OCHIQ RIMAN SIRTLARINI ALGEBRAIK VA XOS GOLOMORF JOYLASHTIRISH HAQIDA

Annotatsiya. *Mazkur ishda kompleks tordan chekli nuqta olib tashlash orqali hosil qilingan ochiq Riman sirtining $\mathbb{C}^3$ fazoga algebraik joylashtirilishi tadqiq etiladi. Veyershtrass $\wp$-funksiyasi yordamida aniq xos golomorf joylashtirish qurilib, uning obrazi affin algebraik egri chiziq ekani ko‘rsatiladi. Yarim davr holatida yuzaga keladigan maxsus holat alohida tahlil qilinib, uni bartaraf etuvchi konstruksiya taklif etiladi.*

Kalit so‘zlar: *ochiq Riman sirti, kompleks tor, Veyershtrass funksiyasi, xos golomorf joylashtirish, algebraik egrik chiziq.*