Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Кулеш Е.В., Стрелова Ю.Ю. Педагог в условиях полиэтнической образовательной среды: результаты апробации методики «Диагностика межкультурной компетенции». “Вестник педагогических наук”, М., 2025, № 3.

(2). Никифорова С.В. К проблемам технологии формирования этнокультурной компетентности. Этнокультурная деятельность в современных образовательных организациях и учреждениях культуры: опыт, проблемы, перспективы. Чебоксары, ЦНС «Интерактив плюс», 2017.

(3). Turdiyeva N.S. Bo‘lajak o‘qituvchilarining etnopedagogik kompetensiyalarini rivojlantirish metodikasini takomillashtirish. 13.00.02 – Ta’lim va tarbiya nazariyasi va metodikasi dissertatsiyasi avtoreferati, Buxoro, 2025.

(4). Pulatova Z.A. Bo‘lajak o‘qituvchilarda etnopedagogik bilim va tajribalarni takomillashtirish metodikasi (falsafiy fanlar misolida). 13.00.02–Ta’lim va tarbiya nazariyasi va metodikasi, falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati, Chirchiq, 2024.

(5). Иванова А.В., Филиппова Н.И. Модели организации непрерывного этнокультурного и поликультурного образования. “Педагогическое образование в России”, М., 2016, № 3, с. 206–212.

(6). Портнягина А.В., Сартаева Е.И. Развитие этнокультурной компетенции детей посредством взаимодействия кластерной системы «родители – дети – социум». “Народное образование Якутии”, 2016, № 4 (100), с. 93–94.

Saidova Zebo Yuldash qizi (Osiyo Xalqaro universiteti magistranti; szebo72222@gmail.com),
Amanbaeva Malohat Alisher qizi (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti; amanbaevamalohat@gmail.com),
Saidov Sherzod Yuldash o‘g‘li (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti; Saidovsherzod936@gmail.com)

MATEMATIKA TO‘GARAKLARIDA FUNKSIYANING QAVARIQLIGI VA BOTIQLIGIDAN KELIB CHIQADIGAN BA’ZI NATIJALARNI O‘QUVCHILARGA O‘RGATISH

Annotatsiya. *Ushbu maqolada funksiyaning qavariqligi va botiqligidan kelib chiqadigan natijalar, xususan, Yensen tengsizligi va uning tatbiqlari yoritilgan. Shuningdek, xalqaro matematik olimpiadalarda berilgan masalalarga Yensen tengsizligi va undan olinadigan xulosalar tatbiq etilgan. Maqola matematik olimpiadalarga tayyorgarlik ko‘rayotgan talabalar va matematik oliy ta’lim muassalarida matematik to‘garaklar uchun mo‘ljallangan.*

Kalit so‘zlar: *qavariq funksiya, botiq funksiya, Yensen tengsizligi.*

Саидова Зебо Юлдаш кызы (Магистрант Азиатского международного университета; szebo72222@gmail.com),
Аманбаева Малохат Алишер кызы (Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; amanbaevamalohat@gmail.com),
Саидов Шерзод Юлдаш угли (Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; Saidovsherzod936@gmail.com)

ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ НЕКОТОРЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ, ВЫТЕКАЮЩИМ ИЗ ВЫПУКЛОСТИ И ВОГНУТОСТИ ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРУЖКАХ

Аннотация. *В данной статье освещаются результаты, вытекающие из выпуклости и вогнутости функции, в частности, неравенство Йенсена и его приложения. Кроме того, неравенство Йенсена и следствия из него применяются к задачам, предлагаемым на международных математических олимпиадах. Статья предназначена для студентов, готовящихся к математическим олимпиадам, а также для математических кружков в высших учебных заведениях.*

Ключевые слова: *Выпуклая функция, вогнутая функция, неравенство Йенсена.*

Saidova Zebo Yuldash qizi (Master’s student at the Asian International University; szebo72222@gmail.com),
Amanbaeva Malohat Alisher qizi (Urgench State University named after Abu Rayhan Beruni; amanbaevamalohat@gmail.com),
Saidov Sherzod Yuldash o‘g‘li (Urgench State University named after Abu Rayhan Beruni; Saidovsherzod936@gmail.com)

TEACHING STUDENTS SOME RESULTS ARISING FROM THE CONVEXITY AND CONCAVITY OF A FUNCTION IN MATHEMATICS CLUBS

Annotation. *This article highlights the results arising from the convexity and concavity of a function, particularly Jensen’s inequality and its applications. Furthermore, Jensen’s inequality and its corollaries are applied to problems proposed in international mathematical olympiads. The article is intended for students preparing for mathematical olympiads and for mathematics clubs in higher educational institutions.*

Key word: *Convex function, concave function, Jensen's inequality.*

Kirish (Introduction). So'nggi yillarda ta'lim sohasida olib borilayotgan islohotlar o'quvchi va talabalar uchun zamon talabiga mos to'garaklar o'tish ustuvor vazifalardan hisoblanadi va ta'lim muassasalarida o'quv jarayonining asosiy vazifasi o'qitish sifatini yangi pog'onaga ko'tarishdan iboratdir. Shunga ko'ra, o'quvchi va talabaga munosabat, ularga yondashish tamoyillari o'zgardi. Dars jarayonida har bir o'quvchi va talabaga uning o'ziga xos xususiyatlari va shaxsiy tajribasini hisobga olgan holda o'quv jarayonida ishtirok etishi uchun sharoit va imkoniyat yaratildi.

Ta'lim muassasasining o'qituvchilari tayyor elektron resurslar asosida dars o'tish bilan chegaralanmasdan balki, ta'limiy resurslarni yaratish hamda uni amalda qo'llovchi o'qitishning zamonaviy texnologiyalari imkoniyatlardan samarali foydalanish, fan va uning tarkibiga kiruvchi bilimlar mazmunini talabalarga yetkazish malakasiga ega shaxs sifatida faoliyat olib borishi lozim. Ushbu maqolada ana shunday talablarga javob beradigan, matematikani chuqur o'rganayotgan o'quvchi va talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, bunda funksiyaning qavariqligi va botiqligidan kelib chiqadigan ajoyib tengsizliklar keltirilgan.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili (Literature review). Ushbu mavzu matematik analizning eng muhim va amaliy ahamiyatga ega bo'lgan bo'limlaridan biri hisoblanadi. Funksiyaning qavariqligi va botiqligini o'rganish nafaqat funksiya grafigini yasashda, balki turli ekstremum masalalarini yechishda, iqtisodiyotda va optimallashtirish muammolarida keng qo'llaniladi. Shu sababli, bu mavzu turli darajadagi (maktab, akademik litsey va oliy ta'lim) o'quv adabiyotlarida va ilmiy-uslubiy ishlarda turlicha yondashuvlar bilan yoritilgan.

Quyida mavzuga oid adabiyotlar tahlili shartli ravishda uch yo'nalishga bo'lib o'rganildi. Oliy ta'lim muassasalari talabalari uchun mo'ljallangan fundamental adabiyotlarda bu tushuncha qat'iy matematik teoremalar va hosilalar yordamida isbotlanadi [1-2] adabiyotlarda funksiya qavariqligi va botiqligi uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari orqali batafsil tushuntirilgan. Asarda funksiya grafigining urinmaga nisbatan qanday joylashishiga qarab qavariqlik va botiqlikning qat'iy ta'riflari berilgan. [1] adabiyot asosiy fundamental darsliklardan biri bo'lib, unda qavariqlik oraliqlarini topish, burilish nuqtalarini aniqlash teoremalari aniq misollar va isbotlar bilan yoritilgan.

Olimpiadalarga va matematik bellashuvlarga tayyorgarlik ko'rayotganlar uchun [3-6] ishlardan foydalanishni tavsiya qilamiz. Jumaladan iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash va to'garak mashg'ulotlariga oid adabiyotlar Olimpiada va matematika to'garaklarida funksiya qavariqligi faqat grafik chizish uchun emas, balki murakkab tengsizliklarni isbotlash uchun eng kuchli qurol sifatida o'rgatiladi. Bunday adabiyotlarda funksiyaning qavariqligidan kelib chiqadigan mashhur Yensen tengsizligi (Jensen's inequality) haqida alohida to'xtalib o'tiladi. Bu orqali o'quvchilarga o'rtacha arifmetik va o'rtacha geometrik qiymatlar orasidagi munosabatlarni, shuningdek, turli non-standart masalalarni funksiyaning xossalari yordamida oson yechish yo'llari o'rgatiladi. So'nggi yillarda chop etilayotgan ta'limiy maqolalarda maktab va universitet o'rtasidagi uzviylikni ta'minlash maqsadida to'garak mashg'ulotlarida qavariqlik tushunchasini chuqurlashtirib o'rgatish (xususan, kesuvchi va yoy uzunligi orqali beriladigan ta'riflar) usullari tahlil qilinmoqda.

Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology). Funksiya qavariqligi va botiqligi tushunchasi.

$f\left(x\right)$ funksiya $\left(a,b\right)$ da berilgan bo'lib, $x_1 < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in \left(a,b\right)$ lar berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, $\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi

$$l\left(x\right) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f\left(x_1\right) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f\left(x_2\right)$$

kozrinishga ega.

Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in \left(a,b\right)$ da $\forall x \in \left(x_1, x_2\right)$ uchun

$$f\left(x\right) \geq l\left(x\right) \qquad \left(f\left(x\right) > l\left(x\right)\right)$$

bo'lsa, $f\left(x\right)$ funksiya $\left(a,b\right)$ da qavariq (qat'iy qavariq) deyiladi.

Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in \left(a,b\right)$ da $\forall x \in \left(x_1, x_2\right)$ uchun

$$f(x) \le l(x) \qquad (f(x) < l(x))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) da botiq (qat'iy botiq) deyiladi.

Agar $p_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} > 0$ va $p_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} > 0$ deb belgilasak hamda $p_1 + p_2 = 1$ ekanligini e'tiborga olsak, $f(x)$ funksiyani biror (a,b) oraliqda qavariq yoki botiqligi ta'rifni quyidagicha ham berish mumkin:

Agar $f(x)$ funksiya uchun $f(p_1x_1 + p_2x_2) \ge p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$ tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a,b), p_1 \ge 0, p_2 \ge 0, p_1 + p_2 = 1$ sonlarda bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda qavariq deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya uchun $f(p_1x_1 + p_2x_2) \le p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$ tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a,b), p_1 \ge 0, p_2 \ge 0, p_1 + p_2 = 1$ sonlarda bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda botiq deyiladi.

1-teorema. a) Agar $f''(x) < 0, x \in (a,b)$ bo'lsa, ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ va $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $p_1 \ge 0, p_2 \ge 0, \ldots, p_n \ge 0$ sonlar uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n) \ge p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_nf(x_n) \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi;

b) Agar $f''(x) > 0, x \in (a,b)$ bo'lsa, ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ va $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ tenglini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $p_1 \ge 0, p_2 \ge 0, \ldots, p_n \ge 0$ sonlar uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n) \le p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_nf(x_n) \quad (2)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot: a) avvalo, ixtiyoriy $c \in (a,b)$ va $x \in (a,b)$ uchun ushbu

$$f(x) \le f(c) + f'(c)(x - c) \quad (3)$$

tengsizlik o'rinli ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

funksiyaning (a,b) oraliqdagi eng katta qiymatini topamiz:

$$g'(x) = f'(x) - f'(c), \quad g''(x) = f''(x) < 0$$

bo'lgani uchun $g'(x)$ funkisya kamayuvchi bo'ladi. $g'(c) = 0$ ekanligidan $g'(x)$ ning ishorasi $x = c$ nuqtadan o'tishda musbatdan manfiyga o'zgarishi kelib chiqadi.

$x = c$ nuqtadan boshqa nuqtada $g'(x)$ nolga aylanmasligidan $g(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishi kelib chiqadi. Demak, $g(x) \le g(c)$ bo'ladi, ya'ni (3) tengsizlik o'rinli bo'ladi;

(3) tengsizlikda tenglik faqat $x = c$ da bajariladi.

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin. Agar $c = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$ bo'lsa, $c \in (a,b)$ bo'ladi. (3) tengsizlikka ko'ra,

$$p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_nf(x_n) \le p_1\big(f(c) + f'(c)(x_1 - c)\big) +$$
$$p_2\big(f(c) + f'(c)(x_2 - c)\big) + \ldots + p_n\big(f(c) + f'(c)(x_n - c)\big) =$$
$$f(c) + f'(c)\big(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - c\big) = f(c)$$
$$= f\big(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n\big)$$

b) bandi ham a) kabi isbot qilinadi. Teorema isbot bo'ldi.

Tahlil va natijalar (Analysis and results).

$m_1 \ge 0, m_2 \ge 0, \ldots, m_n \ge 0\big(m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 0\big)$ ixtiyoriy sonlar bo'lsin.

1-teoremadagi (1) va (2) tengsizliklarda

$$p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, p_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \ldots, p_n = \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

U holda (1) va (2) tengsizlikar, mos ravishda, quyidagicha ko'rinish oladi:

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}\right) \ge \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \ldots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} \quad (4)$$

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}\right) \le \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \ldots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} \quad (5)$$

Yuqoridagi (1), (2), (4) va (5) tengsizliklarga Yensen tengsizliklari deyiladi. (Iogan Lyudvig Yensen (1859–1925) daniyalik matematik).

Endi yuqoridagi mulohazalardan foydalanib, bir qancha misollarni keltiramiz

1-misol. *Agar* a, b, c *musbat haqiqiy sonlar* $abc = 1$ *shartni qanotalantirsa, u holda ushbu*

$$\frac{\Gamma(a)}{1 + a + ab} + \frac{\Gamma(b)}{1 + b + bc} + \frac{\Gamma(c)}{1 + c + ca} \ge 1$$

tengsizlikni isbotlang. Bu yerda Γ *– Gamma funksiya:* $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx,\ a > 0.$

Isbot. Berilganlarga ko'ra, quyidagi munosabatlarga egamiz:

$$\sum_{cyc} \frac{\Gamma(a)}{1 + a + ab} = \frac{\Gamma(a)}{1 + a + ab} + \frac{a}{a}\frac{\Gamma(b)}{1 + b + bc} + \frac{ab}{ab}\frac{\Gamma(c)}{1 + c + ca} =$$
$$= \frac{\Gamma(a)}{1 + a + ab} + \frac{a\Gamma(b)}{a + ab + abc} + \frac{ab\Gamma(c)}{ab + abc + abca}$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{1+a+ab} + \frac{a\Gamma(b)}{1+a+ab} + \frac{ab\Gamma(c)}{1+a+ab} = \frac{\Gamma(a)+a\Gamma(b)+ab\Gamma(c)}{1+a+ab}$$
$$\geq \Gamma\left(\frac{1+a+ab}{1+a+ab}\right)$$

Ma'lumki, Gamma funksiya uchun ixtiyoriy $a>0$ sonlar uchun $\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln^2 x dx > 0$ tengsizlik o'rinli, ya'ni bu funskiya $(0,+\infty)$ oraliqda botiq funksiya bo'ladi. Demak, yuqoridagi (5) Yensen tengsizligiga asosan berilgan tengsizlik a,b,c musbat haqiqiy sonlar uchun o'rinli ekani kelib chiqadi.

$$\sum_{cyc} \frac{\Gamma(a)}{1+a+ab} = \frac{\Gamma(a)+a\Gamma(b)+ab\Gamma(c)}{1+a+ab} \geq \Gamma\left(\frac{1+a+ab}{1+a+ab}\right) = 1.$$

2-misol. Ushbu

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2\ln^2(1+x)}dx \geq \sqrt{\frac{17}{16}}$$

tengsizlikni isbotlang.

Isbot. Yensen tengsizligidan foydalanamiz. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda botiq bo'lsa, u holda bu funksiyaning grafigi shu oraliqda unga o'tkazilgan ixtiyoriy urinma grafigidan tepada yotadi, ya'-ni

$$f(x) \geq \alpha(x-x_0) + f(x_0) \tag{6}$$

bu yerda, $x_0 \in (a,b)$ ixtiyoriy nuqta. Biz yuqoridahi (5) Yensen tengsizligini

$$f(x) = \sqrt{1+x^2},\ g(x) = x\ln(1+x)$$

funksiyalar uchun qo'llashimiz kerak, $f'' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$ ya'ni $f(x)$ funksiya botiq.

Endi, (6) da x o'rniga $g(x)$ ni qo'yib, quyidagi tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$f(g(x)) \geq \alpha(g(x)-x_0) + f(x_0) \tag{7}$$

Shuningdek, (7) ni (a,b) oraliq bo'yicha integrallasak va $x_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$ ni qo'ysak, quyidagi tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(g(x))dx \geq (b-a)f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right). \tag{8}$$

Demak, (a,b) ni o'rniga $(0,1)$ oraliqni qarab va $f(x)$ va $g(x)$ lar o'rniga yuqoridagi qiymatini qo'ysak, u holda

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2\ln^2(1+x)}dx \geq f\left(\int_0^1 x\ln(1+x)dx\right)$$

tengsizlikni olamiz. Ko‘rsatish qiyin emaski, tengsizlikning o‘ng tarafi aynan $\sqrt{\frac{17}{16}}$ ga teng. Isbot tugadi.

3-misol. *Aytaylik f funksiya Ω sohada qavariq va g funsiya esa $\mathbb{R}$ da kamaymaydiygan qavariq funksiya bo‘lsin. U holda ushbu $g^{\circ}f$ kompozitsiya ham Ω sohada qavariq bo‘lishini isbotlang.*

Isbot. Biz ixtiyoriy $x, y \in \Omega$ nuqtalar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlashimiz kerak:

$$(g^{\circ}f)\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \le \lambda (g^{\circ}f)(x) + (1-\lambda)(g^{\circ}f)(y).$$

Haqiqatan ham, bu tengsizlikni o‘rinli ekani f funksiya Ω sohada qavariq ekanidan va g funksiya esa $\mathbb{R}$ da kamaymaydiygan qavariq funksiya bo‘lishidan quyidagicha ko‘rsatiladi:

$$(g^{\circ}f)\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) = g\Big(f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big)\Big) \le g\Big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\Big)$$
$$\le \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)) \ = \lambda (g^{\circ}f)(x) + (1-\lambda)(g^{\circ}f)(y).$$

Muhim natijalar. Yensen tengsizliklarida $f\left(x\right)$ funksiyani turli xil qilib tanlab olish hisobiga ajoyib tengsizliklarni olish mumkin. Masalan,

1) $f\left(x\right) = \ln x$ bo‘lsa,

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

bo‘ladi. Bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$

2) $f\left(x\right) = \sqrt{x}$ bo‘lsa,

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}} \ge \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n},$$

bo‘ladi. Bu yerda $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$.

3) $f\left(x\right) = x^p$ bo‘lsa, $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^p \le \frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}$ bo‘ladi, bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ va $p > 1$.

4) $f\left(x\right) = \sin x$ bo‘lsa,

$$\sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n}$$

bo‘ladi, bu yerda $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[0, \pi\right]$.

5) $f\left(x\right) = x^2$ bo‘lsa,

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right)^2 \le \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \ldots + m_n x_n^2}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$\left(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n\right)^2 \le \left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right)\left(m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \ldots + m_nx_n^2\right)$$

bo‘ladi. Bu tengsizlikda

$$m_1 = b_1^2, m_2 = b_2^2, \ldots, m_n = b_n^2, x_1 = \frac{a_1}{b_1}, x_2 = \frac{a_2}{b_2}, \ldots, x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

desak,

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

Koshi-Bunyokovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

7) $f\left(x\right) = x^p, p > 1, x > 0$ bo‘lsa,

$$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right)^p \le \frac{m_1x_1^p + m_2x_2^p + \ldots + m_nx_n^p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$\left(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n\right)^p \le \left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right)^{p-1}\left(m_1x_1^p + m_2x_2^p + \ldots + m_nx_n^p\right)$$

bo‘ladi. Bu tengsizlikda

$$q = \frac{p-1}{p}, m_1 = b_1^q, m_2 = b_2^q, \ldots, m_n = b_n^q, x_1 = \frac{a_1}{b_1^{q-1}}, x_2 = \frac{a_2}{b_2^{q-1}}, \ldots, x_n = \frac{a_n}{b_n^{q-1}}$$

desak,

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^p \le \left(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p\right)\left(b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right) \le \left(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Gyolder tengsizligi kelib chiqadi.

Xulosa va takliflar (Conclusion/Recommendations). Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, “Funksiya qavariqligi va botiqligi” tushunchasi o‘rganilayotgan auditoriya darajasiga qarab farqlanadi. Maktab darsliklarida mavzu vizual va boshlang‘ich darajada tushuntirilsa, oliy ta’lim muassasalarida qat’iy analitik yondashuv asosida o‘qitiladi. Matematika to‘garaklari va olimpiadalar uchun mo‘ljallangan adabi-yotlar esa bu ikki bosqich o‘rtasidagi ko‘prik vazifasini o‘tab, o‘quvchilarga ushbu matematik tushuncha-ning tengsizliklarni isbotlashdagi va amaliy masalalarni yechishdagi yashirin imkoniyatlarini ochib beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati (References):

(1). Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma’ruzalar, I, II q., T., “Voris-nashriyot”, 2010.

(2). Aksoy A.G., Khamsi M.A. A problem book in real analysis. Springer, 2010.

(3). PUTNAM. Training Problems, 2011.

(4). R.Madrahimov, J.Abdullayev, N.Kamolov. Masala qanday yechiladi? Urganch, 2013.

(5). Sh.Abdullayev, N.A.Boboyarova. Matematika to‘garaklari uchun mavzulashtirilgan nostandart masalalar. Urganch, 2024, 72 bet, “Milleniumus print” MCHJ.

(6). В.А.Садовничий, А.С.Подколзин. Задачи студенческих олимпиад по математике. Москва, Издательство «Наука», 1978.