Ахматов Азизбек Абдувахобов угли (PhD по физико-математическим наукам, и.о. доцента кафедры «Математика» Навоийского государственного университета; E-mail: aaakhmatov94@gmail.com)

ДИСКРЕТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Аннотация. *В работе исследуются задачи стабилизации положений равновесия и установившихся движений управляемых механических систем с голономными связями при дискретном управлении. Динамика системы описывается уравнениями Лагранжа с учетом нелинейности инерционных и силовых характеристик. Предлагаются структуры дискретных законов управления на основе потенциальных функций и интегральных корректирующих слагаемых, не требующие измерения скоростей обобщенных координат. С использованием прямого метода Ляпунова и предельных систем получены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости программных положений и стационарных движений. Доказано, что при выполнении сформулированных условий каждое ограниченное движение системы неограниченно приближается к одному из положений равновесия. Полученные результаты расширяют класс дискретных методов управления нелинейными механическими системами и могут быть использованы при анализе систем с неполной измеримостью состояния.*

Ключевые слова. *механическая система, дискретное управление, стабилизация, асимптотическая устойчивость, уравнения Лагранжа, функция Ляпунова.*

Axmatov Azizbek Abduvaxob o‘g‘li (fizika-matematika fanlari falsafa bo‘yicha doktori, Navoiy davlat universiteti “Matematika” kafedrasi dotsenti v.b.; E-mail: aaakhmatov94@gmail.com)

MEXANIK SISTEMALARNI TEZLIKLARNI O‘LCHAMASDAN DISKRET STABILIZATSIYALASH

Annotatsiya. *Ushbu ishda diskret boshqaruv ostidagi golonom bog‘lanishli boshqariluvchi mexanik sistemalarning muvozanat holatlari va barqarorlashgan harakatlarini stabillashtirish masalalari tadqiq etiladi. Sistema dinamikasi inersion va kuch xarakteristikalarining nochiziqligini hisobga olgan holda Lagranj tenglamalari orqali tavsiflanadi. Potensial funksiyalar va integrallovchi regulator hadlar asosida, umumlashgan koordinatalar tezligini o‘lchashni talab qilmaydigan diskret boshqaruv qonunlarining tuzilmalari taklif etilgan. Lyapunovning bevosita usuli va chekli sistemalardan foydalangan holda dasturlangan holatlar va statsionar harakatlarning tekis asimptotik turg‘unligi uchun yetarli shartlar olingan. Shakllantirilgan shartlar bajarilganda, sistemaning har bir chegaralangan harakati muvozanat holatlaridan biriga cheksiz yaqinlashishi isbotlangan. Olingan natijalar nochiziqli mexanik sistemalarni diskret boshqarish usullari doirasini kengaytiradi va holati to‘liq o‘lchanmaydigan sistemalarni tahlil qilishda foydalanilishi mumkin.*

Kalit so‘zlar: *mexanik sistema, diskret boshqaruv, stabillashtirish, asimptotik turg‘unlik, Lagranj tenglamalari, Lyapunov funksiyasi.*

Akhmatov Azizbek Abduvakhobov ugli (PhD in Physical and Mathematical Sciences, Acting Associate Professor, Department of Mathematics, Navoi State University; E-mail: aaakhmatov94@gmail.com)

DISCRETE STABILIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS WITHOUT VELOCITY MEASUREMENTS

Annotation. *This paper investigates the problems of stabilizing equilibrium positions and steady-state motions of controlled holonomic mechanical systems under discrete-time control. The system dynamics are described by Lagrange equations, accounting for the nonlinearity of inertial and force characteristics. Discrete-time control law structures based on potential functions and integral correction terms are proposed, which do not require velocity measurements of generalized coordinates. Using Lyapunov's direct method and limiting systems, sufficient conditions for the uniform asymptotic stability of programmed positions and stationary motions are obtained. It is proved that when the formulated conditions are met, every bounded motion of the system approaches one of the equilibrium positions indefinitely. The results extend the class of discrete-time control methods for nonlinear mechanical systems and can be applied in the analysis of systems with incomplete state measurability.*

Keywords: *mechanical system, discrete control, stabilization, asymptotic stability, Lagrange equations, Lyapunov function.*

Введение (Introduction). Задачи стабилизации движений механических систем являются важной проблемой современной теории управления и анализа нелинейных динамических систем. В условиях цифровизации управления и широкого применения микропроцессорных устройств воз-

растает роль дискретных законов управления, реализуемых с фиксированным шагом дискретизации.

В классических исследованиях основное внимание уделялось системам с непрерывным управлением и полной измеримостью фазовых координат. Однако на практике измерение скоростей часто невозможно или существенно затруднено, а управление формируется дискретно во времени. Это требует разработки новых методов анализа устойчивости таких систем.

В работе рассматриваются управляемые механические системы с голономными связями, динамика которых описывается уравнениями Лагранжа. Предлагаются дискретные законы управления, обеспечивающие стабилизацию положений равновесия и установившихся движений без измерения скоростей. Исследование устойчивости проводится с использованием прямого метода Ляпунова и аппарата предельных систем.

Анализ литературы по теме (Literature review). Проблема устойчивости и стабилизации механических систем занимает центральное место в современной теории управления. Существенный вклад в развитие методов анализа устойчивости дискретных динамических систем внесли работы А.Халаная и В.Расвана, в которых разработаны фундаментальные подходы к исследованию устойчивости и устойчивых колебаний в системах с дискретным временем [1].

В последние годы активно исследуются задачи стабилизации движений механических систем с голономными связями без использования информации о скоростях. В работах [2,3] предложены эффективные методы стабилизации программных движений механических систем, основанные на использовании потенциальных функций и нелинейных PI-регуляторов.

Дальнейшее развитие этих подходов связано с применением дискретных законов управления для нелинейных механических систем. В частности, в работах [4,5] исследуются задачи стабилизации установившихся движений механических систем при дискретном управлении без измерения скоростей, а также рассматриваются задачи стабилизации вращательного движения исполнительных механизмов манипуляторов. Несмотря на значительные достижения в данной области, вопросы построения дискретных алгоритмов стабилизации для нелинейных механических систем с неполной измеримостью состояния остаются актуальными и требуют дальнейшего исследования.

Методология исследования (Research Methodology). Пусть имеется управляемая механическая система с голономными связями, описываемая уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q+U \tag{1}$$

где $q \in R^n$ – вектор обобщенных координат, $T=\dot{q}'A(q)\dot{q}/2$ – кинетическая энергия системы, $A(q)\in R^{n\times n}$, $A(q)=\left(a_{jk}(q)\right)$ – соответствующая инерционная матрица, Q и U – соответствующие обобщенные векторы неуправляемых и управляемых сил, штрихом обозначена операция транспонирования, $\| q \|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+...+q_n^2}$ – евклидова векторная норма.

Анализ и результаты (Analysis and results). Рассмотрим задачу о стабилизации программной позиции системы (1), за которую, без ограничения общности, можем принять положение

$$\dot{q}=0,\quad q=0 \tag{2}$$

Разложим обобщенную силу Q:

$$Q=Q_{(0)}+Q_{(1)}+Q_{(2)}$$

$$Q_{(0)}=Q(t,0,0),\quad Q_{(1)}=Q(t,q,\dot{q})-Q(t,q,0),\quad Q_{(2)}=Q(t,q,0)-Q(t,0,0)$$

Силу $Q_{(1)}=Q_{(1)}(t,q,\dot{q})$ можно определить как действие совокупности диссипативно-ускоряющих сил, а силу $Q_{(2)}=Q_{(2)}(t,q)$ – как действие потенциальных и неконсервативных сил.

Допустим, что обобщенные координаты могут быть разделены $q'=(q^{(1)}{}',q^{(2)}{}')',\quad q^{(1)}=(q_1,q_2,...,q_k)',\quad q^{(2)}=(q_{k+1},q_{k+2},...,q_n)'\quad (1\le k\le n)$

Положим, что сила $Q_{(1)}$ представляет собой действие гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией, возможно, достаточно малой, по $\dot{q}^{(1)}$ $Q_{(1)}'\dot{q} \le -\gamma \| \dot{q}^{(1)}(t) \|^2, \ \gamma = const > 0$

Положим также возможным измерение всех или части координат, на основании которого составляется управление U в виде $U' = (U_{(1)}', U_{(2)}')'$

$$U_{(1)} + Q_{(01)} + Q_{(21)}(t,q) = -\Pi_{q^{(1)}}(t,q) - H_{q^{(1)}}(\tilde{q}^{(1)})$$
$$U_{(2)} + Q_{(02)} + Q_{(22)}(t,q) = -\Pi_{q^{(2)}}(t,q) - f_{q^{(2)}}(\tilde{q}^{(2)})' \int_0^t P(t,\nu)(f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu)))d\nu \quad (3)$$

где потенциальная функция $\Pi = \Pi(t,q)$ ($\Pi \in C^1([0,+\infty) \times R^n \to R)$, $\Pi(t,0) \equiv 0$) является невозрастающей по времени, $\partial\Pi(t,q)/\partial t \le 0$; $H(0) \equiv 0$, $\| H_{q^{(1)}q^{(2)}}(q^{(1)}) \| \le h_0 = const$; функция $f = f(q)$ ($f \in C^1(R^n \to R^n)$) имеет конечное число прообразов в ограниченной области $\{q \in R^n : \ \| q \| \le H_1 < +\infty\}$, или уравнение $f(q) = c$ ($c = \text{const}$) имеет конечное число решений в этой области; $f_q = \partial f / \partial q$, симметричная матрица $P = P(t,\nu)$ ($P \in C^1(S \to R^{(n-k)\times(n-k)})$) и ее производная $\partial P(t,\nu)/\partial t$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\alpha_1(\nu - t) \| x \|^2 \le x' P(t,\nu) x \le \alpha_2(\nu - t) \| x \|^2$$
$$x'(\partial P(t,\nu)/\partial t)x \le -\alpha_3(\nu - t) \| x \|^2 \quad \forall x \in R^{n-k}$$

где скалярные непрерывные положительные функции $\alpha_1 = \alpha_1(s)$, $\alpha_2 = \alpha_2(s)$ и $\alpha_3 = \alpha_3(s)$ определены при всех $s \le 0$ и имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^0 \alpha_l(\nu) d\nu < +\infty, \quad l = 1,2,3$$

Здесь и далее использованы обозначения

$$\Pi_q(t,q) = \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q}, \ \Pi_t(t,q) = \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial t}, \ f_q(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q}, \ P_t(t,\nu) = \frac{\partial P(t,\nu)}{\partial t}$$

Одна составляющая управления по $q^{(1)}$ является дискретной ступенчатой релейной функцией $\tilde{q}^{(1)} = q^{(1)}(kT)$, $kT \le t < (k+1)T$.

Запаздывание $\mu_k(t) \in C^1$ при $kT \le t < (k+1)T$ разрывно при $t = kT$. Однако это не влияет на оценку вводимого ниже функционала и оценки его производной

$$V = \frac{1}{2}\dot{q}'(t)A(q(t))\dot{q}(t) + \Pi(t,q(t)) + H(q^{(1)}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t (f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu)))' P(t,\nu)(f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu)))d\nu +$$
$$+ \frac{\gamma}{2T}\int_{-T}^0 d\nu \int_\nu^0 \| \dot{q}^{(1)}(s) \|^2 ds$$

Для полной производной этого функционала в силу (1) и (2) с учетом (3) находим

$$\dot V = Q_1'\dot q + \Pi_t(t,q) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t (f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu)))' P_t(t,\nu)(f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu)))d\nu +$$

$$+L\int_{t-T}^{t} \| (\dot q^{(1)}(t))'\dot q^{(1)}(\nu)\| d\nu + \frac{\gamma}{2T}\int_{t-T}^{t} (\| \dot q^{(1)}(t)\|^2 - \| \dot q^{(1)}(\nu)\|^2)d\nu \le -W =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_3(\nu - t)\| f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu))\|^2 \, d\nu - \varepsilon_0 \| \dot q(t)\| \le 0$$

$(\varepsilon_0 > 0)$

Уравнения, предельные к (1) с (2), имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^*_{(1)}(t,q,\dot q) + U^* \tag{4}$$

где $U^* = (U_{(1)}, U^*_{(2)})'$,

$$U^*_{(2)} = -\Pi^*_{q^{(2)}}(t,q(t)) - (f_{q^{(2)}}(q^{(2)}(t)))'\int_{-\infty}^{t} P^*(t,\nu)(f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu)))d\nu .$$

Функционал W^*, предельный к W, имеет вид

$$W^* = \int_{-\infty}^{t} \alpha_3(\nu - t)\| f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu))\|^2 \, d\nu + \varepsilon \| \dot q^{(1)}(t)\|^2 , \ (\varepsilon > 0)$$

Находим, что множество

$$\{W^* = 0\} = \{q^{(2)} = q^{(2)}(t):\ q^{(2)}(\nu) = q^{(2)}(t), \quad -\infty < \nu \le t, \ \ \dot q^{(1)}(t) = 0\}$$

содержит лишь те решения уравнения (1.4), для которых

$$\Pi^*_{q^{(2)}}(t,q) \equiv 0, \ \ \Pi^*_{q^{(1)}}(t,q) + H_{q^{(1)}}(q^{(1)}) \equiv 0 .$$

Положим

$$\| \Pi_{q^{(2)}}(t,q)\| + \| \Pi_{q^{(1)}}(t,q) + H_{q^{(1)}}(q^{(1)})\| \ge \Pi_0(q) \ge 0$$

Отсюда получены следующие результаты.

Утверждение 1. Допустим, что множество $\{\Pi_0(q) = 0\} \cap \{\| q\| \le H_1 < H\}$ состоит из конечного числа точек. Тогда под действием управления (3) каждое ограниченное движение (1) неограниченно приближается к одному из положений равновесия $\dot q = 0, \ \ q = q_0 = \text{const}$, отвечающему равенству $\Pi_0(q_0) = 0$.

Утверждение 2. Пусть управление (3) таково, что имеют место соотношения:

1) $a_1(\| q\|) \le \Pi(t,q) \le a_2(\| q\|)$;

2) $\| \partial\Pi(t,q)/\partial q\| \ge \Pi_0(q) \ge 0$, $\Pi_0(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$.

Тогда положение (2) равномерно асимптотически устойчиво.

Допустим, что имеет место измерение только по последним $(n-\nu)$ $(k < \nu \le n)$ координатам $q_\nu, q_{\nu+1}, \ldots, q_n$, управление имеет вид (3), где $f = f(q_\nu, q_{\nu+1}, \ldots, q_n)$.

Утверждение 3. Утверждение 2 имеет место, если его условия 1 и 2 дополнить условием;

3) множество $\{q_1 = q_{10}, q_2 = q_{20}, \ldots, q_k = q_{k0}, q_\nu = q_{\nu 0}, \ldots, q_n = q_{n0}\} \cap \{\| q\| > 0\}$ не содержит движений каждой из предельных систем.

Заключение (Conclusion). В работе разработан и исследован класс дискретных законов управления для нелинейных управляемых механических систем с голономными связями. На основе аналитических методов получены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивос-

ти положений равновесия и стационарных движений при дискретной реализации управления. Показано, что использование потенциальных функций и интегральных корректирующих слагаемых позволяет обеспечить стабилизацию системы без измерения скоростей обобщенных координат.

Список использованной литературы (References):

[1]. Halanay A., Rasvan V. Stability and stable oscillations in discrete time systems. CRC Press, 2000, 296 p.

[2]. Andreev A.S., Peregudova O.A. Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017, vol. 81, Issue 2, p. 95–105.

[3]. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems. Systems Science and Control Engineering, 2018, vol. 6, p. 12–19.

[4]. Ахматов А.А. Стабилизация установившихся движений механических систем с циклическими координатами дискретным управлением без измерения скоростей. "Ilm sarchashmalari" ilmiy-nazariy, metodik jurnali, 2025, № 10.1, p. 39–43.

[5]. Akhmatov A.A. Stabilization of the rotational motion of a manipulator"s end-effector Scientific reports of Bukhara state university 2025, 8(1), p. 66–71.

Нуриддинов Бахтиёр Зафарович (Ташкентский Химико-технологический институт, заведующий кафедрой высшей математики, доктор философии по физико-математическим наукам (PhD), доцент; nuriddinovbaxtiyor1985@gmail.com),

Умиров Шохрух Боротович (Ташкентский Химико-технологический институт, базовый докторант кафедры высшей математики; shohruxumirov22@gmail.com)

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХСЛОЙНЫХ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Аннотация. *В данной работе исследуется распространение осесимметричных собственных волн в трехслойной цилиндрической неоднородности вдоль радиального направления. Предполагается, что каждый слой является линейно упругим и характеризуется различными механическими свойствами. Уравнения движения выводятся в рамках трехмерной теории упругости в цилиндрических координатах. С помощью решений в виде гармонических волн задача сводится к краевой задаче на собственные значения. Для каждого слоя построены точные аналитические решения, а дисперсионные соотношения получены путем применения идеальных условий контакта на границах слоев и соответствующих граничных условий на внешней поверхности. Проанализировано влияние неоднородности материала и толщины слоя на дисперсионные характеристики. Результаты имеют практическое значение для проектирования и неразрушающего контроля многослойных цилиндрических конструкций, используемых в инженерных приложениях.*

Ключевые слова: *осесимметричные волны, собственные волны, многослойный цилиндр, структурная неоднородность, дисперсионные соотношения.*

UCH QATLAMLI STRUKTURAVIY NOBIR JINSLI SILINDRIK JISMLARDAGI O‘QQA NISBATAN SIMMETRIK XUSUSIY TO‘LQINLAR

Annotatsiya. *Ushbu ishda radial yo‘nalish bo‘ylab uch qatlamli silindrik nobir jinslilikda o‘qqa nisbatan simmetrik xususiy to‘lqinlarning tarqalishi tadqiq qilinadi. Har bir qatlam chiziqli elastik deb faraz qilinadi va turlicha mexanik xossalar bilan xarakterlanadi. Harakat tenglamalari silindrik koordinatalar sistemasida elastiklik nazariyasining uch o‘lchamli masalasi doirasida keltirib chiqariladi. Garmonik to‘lqinlar ko‘rinishidagi yechimlar yordamida masala xususiy qiymatlar haqidagi chegaraviy masalaga keltiriladi. Har bir qatlam uchun aniq analitik yechimlar qurilgan, dispersiyaviy bog‘lanishlar esa qatlamlar chegaralarida ideal kontakt shartlarini hamda tashqi sirtda tegishli chegaraviy shartlarni qo‘llash orqali olingan. Materialning nobir jinsliligi va qatlam qalinligining dispersiyaviy xarakteristikalarga ta’siri tahlil qilingan. Natijalar muhandislik sohalarida qo‘llaniladigan ko‘p qatlamli silindrik konstruksiyalarni loyihalash va ularni buzmasdan nazorat qilish (defectoscopy) uchun amaliy ahamiyatga ega.*

Kalit so‘zlar: *o‘qqa nisbatan simmetrik to‘lqinlar, xususiy to‘lqinlar, ko‘p qatlamli silindr, strukturaviy nobir jinslilik, dispersiyaviy bog‘lanishlar.*

AXISYMMETRIC EIGENWAVES IN THREE-LAYER STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL BODIES

Annotation. *This paper investigates the propagation of axisymmetric eigenwaves in a three-layer cylindrical inhomogeneity along the radial direction. It is assumed that each layer is linearly elastic and characterized by distinct mechanical properties. The equations of motion are derived within the framework*