Yechilishi. Berilgan yig‘indini q ga ko‘paytirib, undan S_n ni ayiramiz:

$$qS_n - S_n = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \cdots + nq^{n+1} - (q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n) =$$
$$= -(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) + nq^{n+1}.$$

O‘ng tomonda qavs ichida birinchi hadi $b_1 = q$, maxraji q ga va n-hadi q^n ga teng bo‘lgan chekli progressiya yig‘indisi:

$$\sigma_n = \frac{q(1-q^n)}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}, (|q| < 1)$$

turibdi.

U holda

$$(q-1)S_n = \frac{q-q^{n+1}}{q-1} + nq^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{nq^{n+1}}{q-1} + \frac{q-q^{n+1}}{(q-1)^2}.$$

Shartga asosan, $|q| < 1$ bo‘lganligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$.

U holda

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{nq^{n+1}}{q-1} + \frac{q-q^{n+1}}{(q-1)^2}\right] = \frac{q}{(q-1)^2}, (|q| < 1).$$

ekanligini hosil qilamiz.

Demak, javobi $\frac{q}{(q-1)^2}$.

Tahlil va natijalar. Sonlar ketma-ketligini hisoblashda turli metodlar qo‘llanilishi ma’lum, ammo bu muammoni hal etishda progressiyalar nazariyasining tatbiqlari ochib berilmagan. Bu nazariyaning tatbiqlari konkret misollar asosida ko‘rsatilib ishonchli natijalar olingandir.

Xulosa va takliflar. Sir emas, sonlar ketma-ketligini limitini hisoblashda ajoyib limitlar, muhim limitlar nazariyasidan foydalanish ko‘p qo‘llaniladi. Mazkur ishda progressiyalar nazariyasidan foydalanib ham ko‘plab limitlarni osongina hisoblash mumkinligi ochib beriladi. Bu metodni kelgusida ham tegishli limitlarga qo‘llab, natijalar olishga to‘la ishonamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. М., 1971.
(2). Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. М., 1962.
(3). Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz. T., 1986.
(4). Glagolov N.S. va bosh. Matematika. 1-qism, T., 1970.
(5). Baranov I.A. va bosh. Matematika. T., 1986.
(6). Gusev B.A., Mordkovich A.G. Matematika. T., 1988.
(7). Modenov P.S. Matematika masalalari to‘plami. T., 1956

Baltayeva Umida Ismoilovna (Fizika-matematika fanlari professori, Xorazm Ma’mun akademiyasi aniq fanlar bo‘limi bosh ilmiy xodimi),
Asqarova Dildora Ulug‘bekovna (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti “Algebra va matematik injinering” kafedrasi o‘qituvchisi),
Ro‘zimova Dilnoza G‘ayratovna (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, “Matematik injinering” yo‘nalishi 2-bosqich magistranti)

O‘SISH–FRAGMENTATSIYA MODELI UCHUN BOSHLANG‘ICH-CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI

Annotatsiya. *Bugungi kunda saraton kasalligi jahon miqyosida tibbiyotning eng murakkab muammolaridan biri bo‘lib qolmoqda. Kasallikning asoratli shakli–birlamchi o‘smadan hujayra klasterlarining qon va limfa tizimi orqali boshqa organlarga ko‘chib, u yerda ikkilamchi o‘smalar hosil qilishi jarayoni, ya’ni saraton bilan bog‘liq o‘*$\forall t \in \mathbb{R}^+$ *limlarning asosiy sababi hisoblanadi. Ilmiy adabiyotlardagi ma’lumotlarga ko‘ra, saraton bilan bog‘liq o‘limlarning taxminan 90 foizi aynan shu jarayon oqibatida yuz beradi. Shu bois ikkilamchi o‘sma hosil qilish jarayonini matematik tarzda tavsiflash, uning dinamikasini miqdoriy baholash hamda davolash strategiyalarini asoslash zamonaviy matematikaning dolzarb muammolaridan biri hisoblanadi.*

Kalit so‘zlar: *metastaz, hujayra klasterlari, birlamchi o‘sma, o‘sish-fragmentatsiya tenglamasi, zichlik funksiyasi, xarakteristik egri chiziqlar, eksponensial o‘sish, Gompertz o‘sish qonuni, Banax fazosi, yagona yechim.*

Балтаева Умида Исмоиловна (Профессор физико-математических наук, главный научный сотрудник отдела точных наук Хорезмской академии Маъмуна),
Аскарова Дилдора Улугбековна (Преподаватель кафедры "Алгебра и математическая инженерия" Ургенчского государственного университета имени Абу Райхон Беруний),
Рузимова Дилноза Гайратовна (Магистрант 2-го курса направления «Математическая инженерия» Ургенчского государственного университета)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ РОСТА–ФРАГМЕНТАЦИИ

Аннотация. *На сегодняшний день онкологические заболевания остаются одной из наиболее сложных проблем мировой медицины. Наиболее тяжёлой формой данного заболевания является метастазирование–процесс распространения кластеров клеток из первичной опухоли через кровеносную и лимфатическую системы в другие органы с последующим формированием вторичных опухолей, что считается основной причиной смертности, связанной с онкологическими заболеваниями. Согласно данным научной литературы, приблизительно 90% летальных исходов при онкологических заболеваниях обусловлены именно этим процессом. В связи с этим математическое описание процесса метастазирования, количественная оценка его динамики, а также обоснование стратегий лечения являются одной из актуальных задач современной математики.*

Ключевые слова: *метастаз, кластеры клеток, первичная опухоль, уравнение роста-фрагментации, функция плотности, характеристические кривые, экспоненциальный рост, закон роста Гомперца, пространство Банаха, единственное решение.*

Baltaeva Umida Ismoilovna (Professorof Physical and Mathematical Sciences, Chief Research Scientist of the Department of Exact Sciences, Khwarazm Ma'mun Academy; umidamath26@gmail.com),
Askarova Dildora Ulugbekovna (Lecturer at the Department of "Algebra and Mathematical Engineering", Urgench State University of Abu Rayhon Beruniy; asqarovadildora632@gmail.com),
Ruzimova Dilnoza Gayratovna (2nd-year Master's Student of the «Mathematical Engineering» program, Urgench State University; dilnozarozimova19@gmail.com)

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION TO AN INITIAL–BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A GROWTH–FRAGMENTATION MODEL

Annotation. *Cancer remains one of the most complex challenges in global medicine today. The most severe form of this disease is metastasis–the process by which clusters of cells spread from the primary tumor through the bloodstream and lymphatic system to other organs, where they form secondary tumors – which is considered the leading cause of cancer-related mortality. According to data from the scientific literature, approximately 90% of cancer-related deaths are attributable to this process. Therefore, the mathematical description of the metastasis process, the quantitative assessment of its dynamics, and the justification of treatment strategies represent one of the most pressing problems of modern mathematics.*

Keywords: *metastasis, cell clusters, primary tu*$(t,x)\in]0,\infty[\times I$ *mor, growth-fragmentation equation, density function, characteristic curves, exponential growth, Gompertz law of growth, Banach space, unique solution.*

1. Kirish. Mazkur ishda o'sish-fragmentatsiya tenglamalari doirasida hujayra klasterlarining dinamikasini hisobga oluvchi yangi matematik model quriladi. Ushbu yondashuv birlamchi o'smadan turli o'lchamdagi klasterlarning stoxastik chiqarilishini, metastazlarning o'sishini va fragmentatsiya jarayonini birgalikda tavsiflaydi. $(t,x)\in]0,\infty[\times I$ sohada quyidagi masalani qaraymiz [1]:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) + \partial_x (g(x)\rho(t,x)) + B(x)\rho(t,x) = F(t,x) + \int_x^{+\infty} B(y)k(x,y)\rho(t,y)dy, \\ \alpha\rho(t,x_0) + \beta\dfrac{\partial\rho}{\partial x}(t,x_0) = h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), \quad \forall x \in I. \end{cases}$$

bu yerda,

$g(x)$–*o'lchami* x *bo'lgan klasterlarning o'sish tezligi;*

$B(x)$–*parchalanish intensivligini tavsiflaydi;*

$k(y,x)$– *fragmentatsiya yadrosi;*

$\rho_{in}(t)$ *–minimal o'lcham chegarasida aniqlangan, birlamchi o'simtadan chiqadigan emissiya intensivligini ifodalovchi chegaraviy kirish oqimi;*

$\rho_0(x)$ *– Klasterlarning t=0 da boshlang'ich o'lchamini ifodalaydi;*

Bu yerda: (α,β) – berilgan konstantalar bo'lib, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ shartini qanoatlantiradi. $h(t)$ esa berilgan ma'lum funfsiya. $\rho(t,x)$ ni t vaqt momentida va x o'lchamdagi metastazlarning zichlik funksiyasi deb qaraymiz. Mazkur modelda $F(t,x)$ manba hadi birlamchi o'simtaning metastatik jarayon rivojiga qo'shadigan hissasini tavsiflaydi, uning vaqtga bog'liqligi esa birlamchi o'simta hajmining vaqt bo'yicha evolyutsion o'zgarishi bilan belg'ilanadi [2].

O'sish tezligi $g(x)$ bilan bog'liq xarakteristik egri chiziqlar $s\to X(s;t,x)$ ko'rinishidagi funksiyalar bo'lib, $s\in R_+$ da aniqlangan, $(t,x)\in R_+\times R$ parametrlar orqali beriladi va quyidagi Koshi masalasining yechimlari bo'lsin:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}X(s;t,x)=g(X(s;t,x))\\ X(t;t,x)=x\end{cases} \tag{2}$$

Biz $g(x)\in C^1(I)$ deb faraz qilamiz hamda barcha $(t,x)\in R_+\times I$, uchun (2) masala R da aniqlangan yagona $X(t,x)$ yechimga ega bo'lishini qabul qilamiz. Biz xarakteristik egri chiziqlarning boshlang'ich nuqtasi sifatida $(\tau(t,x),\overline{X}(t,x))$ ni kiritishimiz mumkin.

$$\begin{cases}\tau(t,x)=0,\ \overline{X}(t,x)=X(0;t,x)\ agar\ x>X(t;0,x_0)\\ \overline{X}(t,x)=x_0,\ X(\tau(t,x);t,x)=x_0\ agar\ x<X(t;0,x_0)\end{cases} \tag{3}$$

shuningdek, asosiy xarakteristik egri chiziqlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\phi_t(x)=X(t;0,x).$$

Eksponensial va Gomperts o'sish qonunlari uchun ushbu faraz, mos ravishda, $x_0\geq 0\quad yoki\quad x_0>0$ bo'lganda bajariladi.

1.Exponensial o'sish uchun g(x)=a x va biz $X(s;t,x)=xe^{a(s-t)}$ egamiz hamda

$$\overline{X}(t,x)=\begin{cases}xe^{-at} & \text{agar } x>x_0e^{at}\\ x_0 & \text{aks holda}\end{cases},\quad \tau(t,x)=\begin{cases}t-\dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right) & \text{agar } x<x_0e^{at}\\ 0 & \text{aks holda}\end{cases}$$

2. Gomperts o'sish qonuni uchun, $g(x)=ax\ln\left(\dfrac{b}{x}\right)$ bo'lgan holda, biz $X(s;t,x)=b\left(\dfrac{x}{b}\right)^{e^{-a(s-t)}}$ ni olamiz va

$$\overline{X}(t,x)=\begin{cases}b\left(\dfrac{x}{b}\right)^{e^{at}} & \text{agar } x>b\left(\dfrac{x_0}{b}\right)^{e^{-at}}\\ x_0 & \text{aks holda}\end{cases},$$

$$\tau(t,x)=\begin{cases} t-\dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{b}\right)}{\ln\left(\dfrac{x_0}{b}\right)}\right) & \text{agar } x>b\left(\dfrac{x_0}{b}\right)^{e^{-at}} \\ 0 & \text{aks holda} \end{cases}.$$

Lemma 1. Faraz qilaylik, ρ ushbu masalaning yechimi bo‘lsin, u holda xarakteristik egri chiziqlar bo‘ylab aniqlangan funksiyalar quyidagicha aniqlanib:

$$\begin{cases} V_{t,x}: s\mapsto \rho(s,X(s;t,x)) \\ W_{t,x}: s\mapsto g(X(s;t,x))\rho(s,X(s;t,x)) \end{cases}.$$

bu yerda funksiyalar quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:

$$\frac{dV_{t,x}(s)}{ds}=-\big(g'(X(s))+B(X(s))\big)V_{t,x}(s)+F(s,X(s))+G(\rho)(s,X(s)),$$

$$\frac{dW_{t,x}(s)}{ds}=-B(X(s))W_{t,x}(s)+g(X(s))\big(F(s,X(s))+G(\rho)(s,X(s))\big).$$

Bu yerda

$$G(\rho)(s,X(s))=\int_{X(s)}^{+\infty}B(y)k(y,X(s))\rho(s,y)dy.$$

belgilash bo‘lib,

$$V_{t,x}(s)=S_{t,x}(s,t)V_{t,x}(t)+\int_t^s S_{t,x}(s,u)\big(F(u,X(u))+G(\rho)(u,X(u))\big)du,$$

$$W_{t,x}(s)=\mu_{t,x}(s,t)W_{t,x}(t)+\int_t^s \mu_{t,x}(s,u)g(X(u))(F+G(\rho))(u,X(u))du$$

Bu yerda:

$$S_{t,x}(\overline{s},s)=\exp\left(-\int_s^{\overline{s}}\big(g'(X(u;t,x))+B(X(u;t,x))\big)du\right) \text{ va}$$

$$\mu_{t,x}(\overline{s},s)=\exp\left(-\int_s^{\overline{s}}B(X(u;t,x))du\right)$$

Eksponensial o‘sishning ushbu xususiy holatida, ya’ni, $g(x)=a\,x$ bo‘lganda, metastazalar o‘lchami x_{kr} chegaraviy qiymatidan kichik bo‘lsa, fragmentatsiya jarayoni mavjud emas, ya’ni, $B(X(s;t,x))=0$.[3] Shu sababli xarakteristikalar

$$W_{t,x}(s)=axe^{a(s-t)}V_{t,x}(s)=W_{t,x}(t)+a\int_t^s xe^{a(s-u)}F\left(u,axe^{a(s-u)}\right)du.$$

1-teorema.

Quyidagilarni faraz qilamiz:

- $\rho_0\in X$ *manfiy bo‘lmagan va* $K_1:=[x_0,\overline{x}_0]$ *oraliqda kompakt bo‘lsin.*
- g *funksiya* $g\in C^1(I)$, g *funksiya* I *oraliqda uzluksiz yetarlicha silliq funksiya bo‘lsin.*
- B *funksiya* $[x_0,+\infty)$ *oraliqda uzliksiz va shunday* x_B *mavjudki,* $x<x_B$ *bo‘lganda* $B(x)=0$,
- $k(y,x)$ *yadro funksiyasi bo‘lib, shunday* $x_{kr}<x_B$ *o‘zgarmas son mavjudki, barcha* $x\ge x_{kr}$ *uchun* $\int_{x_0}^{x}yk(y,x)dy=x$ *bo‘lsin.*

U holda, har bir $T > 0$ uchun shunday kompakt $K_T \subset [x_0, +\infty)$ mavjudki, ψ operator

$$\Psi(\rho)(t,x) = \Psi_0(t,x) + \Psi_F(t,x) + \Psi_B(\rho)(t,x)$$

$Q_{T,K}$ Banax fazosida yagona fiksirlangan nuqtaga ega bo'ladi [2].

Bu yerda:

$$\Psi_0(t,x) = S_{t,x}(t,\tau(t,x))\rho_0(\overline{X}(t,x)),$$

$$\Psi_F(t,x) = \int_{\tau(t,x)}^{t} S_{t,x}(t,s)F(s,X(s;t,x))ds,$$

$$\Psi_B(\rho)(t,x) = \int_{\tau(t,x)}^{t} S_{t,x}(t,s)G(\rho)(s,X(s;t,x))ds.$$

bunda

$$G(\rho)(s,X(s;t,x)) = \int_{X(s;t,x)}^{+\infty} B(y)k(y,X(s;t,x))\rho(s,y)dy \ .$$

Isbot. Yechimning mavjudligi $\dfrac{dM_1(t)}{dt} - aM_1(t) = 0$ 1-teoremadan kelib chiqadi. Yagonalikni isbotlash uchun (1)-tizimning ikkita yechimi ρ_1 va ρ_2 ni qaraymiz. Ularning ayirmasi $\rho = \rho_1 - \rho_2$ bo'lib, u $F = 0$, $\rho_{in} = 0$, $\rho_0 = 0$ shartlar ostida (1)-tenglamaning yechimi hisoblanadi hamda $C([0,T]; X)$ fazoga tegishlidir. Ψ_0, Ψ_F va Ψ_B funksiyalarni baholash orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\|\rho(t,\cdot)\|_X = -\int_{x_0}^{+\infty} \partial_x\big(g(x)\rho(t,x)\big)xdx$$

$$-\int_{x_0}^{+\infty} B(x)\rho(t,x)xdx + \int_{x_0}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty} B(y)k(y,x)\rho(t,y)dydx$$

$$= \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\rho(t,x)dx \le a\|\rho(t,\cdot)\|_X$$

Demak, $\rho_0(0) = \rho_{\text{in}}(0) = 0$ bir jinsli shartlar bajarilganda, tengsizlikni qo'llash orqali $\rho_1(t,x) = \rho_2(t,x)$ yechimlar teng ekanligi isbotlanadi. Mazkur teorema yordamida masala Volterra tipidagi integral tenglamaga keltiriladi [2]. Masalani yechimining mavjudligi va yagonaligi integral tenglamalar nazariyasiga asosan isbotlanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

[1]. B.Perthame. Transport Equations in Biology. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7842-4

[2]. C.H.Nkwayep, F.S.Nyaweni, A.A.Saad, K.Thosago, U.Balteva, P.M.Tchepmo Djomegni and F.Hubert. Mathematical modeling of metastatic spreading by clusters. Preprint, 2024.

[3]. K.Iwata, K.Kawasaki and N.Shigesada. A dynamical model for the growth and size distribution of multiple metastatic tumors. J.Theoret. Biol., 203(2) (2000), p. 177–186. https://doi.org/10.1006/jtbi.2000.1075

Gulyamov Gafur (f-m.f.d., professor, Namangan davlat Texnika universiteti),
Umarov Qudiratulla Bekboyevich (f-m.f.n. dotsent, Namangan davlat Texnika universiteti),
Majidova Gulnoza Nurmuhammedovna (PhD, Namangan davlat Texnika universiteti;
E-mail: m.gulnoza.1985@gmail.com),
Madumarova Saodat Qudiratulla qizi (doktorant, Namangan davlat Texnika universiteti;
E-mail: saodatmadumarova0609@gmail.com)

P-N O'TISHLI DIODLARNING VOLT-AMPER HARAKTERISTIKASINI (VAX) NERST-ETTINGSGAUZEN EFFEKTI TA'SIRIDA O'ZGARISHI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Nernst–Ettingsgauzen effekti va tashqi magnit maydonning p–n o'tishli diodlarning volt-amper xarakteristikasiga (VAX) ta'siri nazariy jihatdan tadqiq etildi. Tadqiqot da-*