$$p(\tau,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\tau}\frac{\partial\xi_k(s,t)}{\partial t}ds+p_0(t), \tag{9}$$

систему (7) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Действительно, обозначим через λ_n, $n=0,1,2,\dots$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,\dots$, спектральные данные задачи

$$-y''+q(x+\tau,t)y=\lambda y,\quad x\in R^1.$$

Найдем спектральные данные λ_n, $n=0,1,2,\dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,2,\dots$ для уравнения

$$-y''+q_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in R^1.$$

Решаем задачу Коши $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,2,\dots$ для системы уравнений Дубровина (7). По формуле следов (8) определяем $q(x,t)$ и затем из формулы (9) определяем $p(x,t)$.

Заключение. В данной работе исследована смешанная задача для объединённого нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза и уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы в классе периодических функций. С использованием ме-=тода обратной спектральной задачи получены уравнения эволюции спектральных параметров и установлена инвариантность спектра соответствующего оператора Штурма–Лиувилля. Полученные результаты подтверждают эффективность методов обратной спектральной теории при исследовании нелинейных интегрируемых уравнений.

Список использованной литературы:

(1). Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Physical Review Letters. 1967, vol. 19, Issue 19, p. 1095–1097.

(2). Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. I. Функциональный анализ и его приложения. 1974, т. 8, вып. 3, с. 54–66.

(3). Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза. "Журнал экспериментальной и теоретической физики", 1974, т. 67, № 6, с. 2131–2143.

(4). Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. Математический сборник (новая серия), 1974, т. 95 (135), № 3 (11), с. 331–356.

(5). Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриса. "Теоретическая и математическая физика", 1975, т. 23, № 1, с. 51–68.

(6). Lax P.D. Periodic solutions of the KdV equations. Nonlinear wave motion. Providence: AMS, 1974, p. 85–96.

(7). Verosky J.M. Negative powers of Olver recursion operators. Journal of Mathematical Physics. 1991, vol. 32, Issue 7, p. 1733–1736.

(8). Lou S. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations // Journal of Mathematical Physics. 1994, vol. 35, Issue 5, p. 2390–2396.

Юлдашев Бегзод Эгамберган угли (преподаватель, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни: b.yuldashev@alumni.nsu.ru),

Душамов Акбар Олимбой ўғли (Преподаватель, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; dushamovakbar12@gmail.com)

ПТОЛЕМЕЕВЫ И b – МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. *В данной работе исследуются Птолемеевы полуметрические пространства. Рассматриваются свойства полуметрика и вводится понятие Птолемеева пространства, для которого доказывается неравенство Птолемея для любых четырех точек полуметрического пространства. Основной вклад работы заключается в построении и детальном анализе специальной полуметрики, которая, основываясь на понятии квазиптолемеева пространства, устанавливает глубокую взаимосвязь между b-метрическим и квазиптолемеевым пространствами. Полученные результаты позволяют по-новому взглянуть на структурные особенности данных пространств.*

Ключевые слова: *метрические пространства, полуметрика, птолемеево пространство, квазиптолемеево пространство, неравенство Птолемея.*

PTOLOMEY VA b – METRIK FAZOLAR

Annotatsiya. *Ushbu ishda Ptolomey yarimmetrik fazolari tadqiq etiladi. Ishda Ptolomey fazosi tushunchasi kiritilib, yarim metrik fazoning ixtiyoriy to'rtta nuqtasi uchun Ptolomey tengsizligining bajarilishining zaruriy va yetarlilik sharti isbotlanadi. Tadqiqotning asosiy hissasi maxsus yarim metrikani qurish va tahlil qilishdan iborat bo'lib, u kvazi-Ptolomey fazosi tushunchasiga asoslanib, b-metrik fazo bilan kvazi -Ptolomey fazosi o'rtasidagi chuqur o'zaro bog'liqlikni o'rnatadi. Olingan natijalar ushbu fazolarning strukturaviy xususiyatlarini yangicha nuqtai nazardan tahlil qilish imkonini beradi.*

Kalit so'zlar: *metrik fazolar, semimetrik, Ptolemey fazosi, kvazi-Ptolemey fazosi, Ptolemey tengsizligi.*

PTOLEMAIC AND b – METRIC SPACES

Annotation. *This paper examines Ptolemaic semimetric spaces, building upon the classical Ptolemy inequality. We introduce the concept of Ptolemaic spaces and verify the Ptolemy inequality for arbitrary sets of four points within a semimetric space. The primary contribution of this work is the construction and detailed analysis of a specific semimetric that establishes a deep connection between b-metric spaces and Quasi-Ptolemaic spaces. This construction provides new insights into the structural characteristics of these spaces and extends current understanding of their geometric properties.*

Key words: *metric spaces, semimetric, Ptolemaic space, quasi-Ptolemaic space, Ptolemy's inequality.*

Введение. Неравенство Птолемея в основном связано с задачами кривизны метрических пространств, и Блюменталь [3] использовал их для решения нескольких таких задач.

В разделе, посвященном b – метрическим пространствам, в качестве примера рассматривается полуметрика. Далее вводится понятие Птолемеева пространства и доказано необходимое и достаточное условия птолемеевости для любых четырех точек полуметрического пространства. Однако исследование на этом не ограничивается.

Основной вклад работы заключается в построении и детальном анализе специальной полуметрики, которая, опираясь на понятие квазиптолемеева пространства (из цитируемого источника [1]), устанавливает глубокую взаимосвязь между b – метрическим пространством и квазиптолемеевым пространством. Данная конструкция позволяет по-новому взглянуть на структурные особенности этих пространств.

Метрические и b – метрические пространства. Пусть для множества X определено отображение $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяющее следующим аксиомам, для любых $x, y \in X$:

a) $d(x,y) \geq 0$ и $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

b) $d(x,y) = d(y,x)$.

Тогда (X,d) называется *полуметрическим пространством* [2], а d называется *полуметрикой*. Если в полуметрическом пространстве (X,d) полуметрика d удовлетворяет неравенству треугольника, то есть если для любых $x, y, z \in X$, верно, что $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, то (X,d) называется *метрическим пространством*, а d называется *метрикой* [2,3].

Определение 1. Полуметрическое пространство (X,d) называется b – *метрическим* пространством (квазиметрическим пространством), если существует $k \geq 1$ константа такая, что для любых $x, y, z \in X$ справедливо

$$d(x,y) \leq k[d(x,z) + d(z,y)].$$

Для более детального ознакомления с b – метрическими пространствами можно просмотреть [2].

Пример 1. Пусть (X,d) – метрическое пространство, и $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\lambda > 0, \mu > 0$.

Рассмотрим функцию $L(x,y) = \lambda d(x,y)^{\alpha} + \mu d(x,y)^{\beta}$

для любых $x, y \in X$. $L(x,y)$ не всегда является метрикой, но она является $b-$метрикой с параметром $\max\{2^{\alpha-1}, 2^{\beta-1}\}$, так как

$$L(x,y) = \lambda d(x,y)^{\alpha} + \mu d(x,y)^{\beta} \le \lambda\big(d(x,z)+d(z,y)\big)^{\alpha} + \mu\big(d(x,z)+d(z,y)\big)^{\beta} \le$$
$$\le 2^{\alpha-1}\lambda\big(d(x,z)^{\alpha} + d(z,y)^{\alpha}\big) + 2^{\beta-1}\mu\big(d(x,z)^{\beta} + d(z,y)^{\beta}\big) \le$$
$$\le \max\{2^{\alpha-1}, 2^{\beta-1}\}\cdot\big(L(x,z)+L(z,y)\big).$$

Птолемеевы пространства. Полуметрическое пространство называется *птолемеевым* [1,2,3,4,5, 6,7], если для каждой четвёрки x_1, x_2, x_3, x_4 его точек произведения $d(x_1,x_2)d(x_3,x_4)$, $d(x_1,x_3)d(x_2,x_4)$, $d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)$ расстояний удовлетворяют неравенству Птолемея

$$d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) + d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) \ge d(x_1,x_4)d(x_2,x_3). \qquad (1)$$

Если в евклидовой метрике эти точки лежат на окружности, то в неравенстве (1) получится равенство. Метрическое пространство может не быть птолемеевым, а полуметрическое птолемеево пространство может не быть быть метрическим.

Утверждение 1. Полуметрическое пространство $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ является птолемеевым тогда и только тогда, когда для определителя справедливо неравенство:

$$C(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left|d(x_i,x_j)^2\right| \le 0,$$

где $i, j \in \{1,2,3,4\}$.

Доказательство. Сначала покажем необходимость. Пусть полуметрическая четверка x_1, x_2, x_3, x_4 является птолемеевой, то есть для неё справедливо неравенство $d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) + d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) \ge d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)$.

Тогда нам надо показать, что

$$C(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left|d(x_i,x_j)^2\right| = \begin{vmatrix} 0 & d(x_1,x_2)^2 & d(x_1,x_3)^2 & d(x_1,x_4)^2 \\ d(x_2,x_1)^2 & 0 & d(x_2,x_3)^2 & d(x_2,x_4)^2 \\ d(x_3,x_1)^2 & d(x_3,x_2)^2 & 0 & d(x_3,x_4)^2 \\ d(x_4,x_1)^2 & d(x_4,x_2)^2 & d(x_4,x_3)^2 & 0 \end{vmatrix} \le 0.$$

Вычисляем этот детерминант:

$$C(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0 - d(x_1,x_2)^2 \cdot \begin{vmatrix} d(x_2,x_1)^2 & d(x_2,x_3)^2 & d(x_2,x_4)^2 \\ d(x_3,x_1)^2 & 0 & d(x_3,x_4)^2 \\ d(x_4,x_1)^2 & d(x_4,x_3)^2 & 0 \end{vmatrix} +$$
$$+ d(x_1,x_3)^2 \cdot \begin{vmatrix} d(x_2,x_1)^2 & 0 & d(x_2,x_4)^2 \\ d(x_3,x_1)^2 & d(x_3,x_2)^2 & d(x_3,x_4)^2 \\ d(x_4,x_1)^2 & d(x_4,x_2)^2 & 0 \end{vmatrix} -$$
$$- d(x_1,x_4)^2 \cdot \begin{vmatrix} d(x_2,x_1)^2 & 0 & d(x_2,x_3)^2 \\ d(x_3,x_1)^2 & d(x_3,x_2)^2 & 0 \\ d(x_4,x_1)^2 & d(x_4,x_2)^2 & d(x_4,x_3)^2 \end{vmatrix}.$$

А теперь найдем следующие:

$$\begin{vmatrix} d(x_2,x_1)^2 & d(x_2,x_3)^2 & d(x_2,x_4)^2 \\ d(x_3,x_1)^2 & 0 & d(x_3,x_4)^2 \\ d(x_4,x_1)^2 & d(x_4,x_3)^2 & 0 \end{vmatrix} = d(x_2,x_3)^2 d(x_3,x_4)^2 d(x_4,x_1)^2 +$$

$$+d(x_3,x_1)^2 d(x_2,x_4)^2 d(x_4,x_3)^2 - d(x_2,x_1)^2 d(x_3,x_4)^2 d(x_4,x_3)^2.$$

$$\begin{vmatrix} d(x_2,x_1)^2 & 0 & d(x_2,x_4)^2 \\ d(x_3,x_1)^2 & d(x_3,x_2)^2 & d(x_3,x_4)^2 \\ d(x_4,x_1)^2 & d(x_4,x_2)^2 & 0 \end{vmatrix} = d(x_3,x_1)^2 d(x_4,x_2)^2 d(x_2,x_4)^2 -$$

$$-d(x_2,x_4)^2 d(x_3,x_2)^2 d(x_4,x_1)^2 - d(x_3,x_4)^2 d(x_4,x_2)^2 d(x_2,x_1)^2.$$

$$\begin{vmatrix} d(x_2,x_1)^2 & 0 & d(x_2,x_3)^2 \\ d(x_3,x_1)^2 & d(x_3,x_2)^2 & 0 \\ d(x_4,x_1)^2 & d(x_4,x_2)^2 & d(x_4,x_3)^2 \end{vmatrix} = d(x_2,x_1)^2 d(x_3,x_2)^2 d(x_4,x_3)^2 +$$

$$+d(x_3,x_1)^2 d(x_4,x_2)^2 d(x_2,x_3)^2 - d(x_2,x_3)^2 d(x_3,x_2)^2 d(x_4,x_1)^2.$$

С помощью этих трех вычислений детерминантов получим следующий результат:

$$C(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Big[\big(d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) - d(x_1,x_3)d(x_2,x_4)\big)\cdot\big(d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) +$$
$$+d(x_1,x_3)d(x_2,x_4)\big) - d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2\Big]^2 -$$
$$-4d(x_1,x_3)^2 d(x_2,x_4)^2 d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2.$$

Так как полуметрическое пространство X является птолемеевым по определению 2 получим, что

$$d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) - d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) \le d(x_1,x_4)d(x_2,x_3),$$

поэтому отсюда следует неравенство:

$$C(x_1,x_2,x_3,x_4) \le \Big[d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) +$$
$$+d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) - d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2\Big]^2 -$$
$$-4d(x_1,x_3)^2 d(x_2,x_4)^2 d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2 =$$
$$= d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2 \cdot \Big[\big(d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) - d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) -$$
$$-d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)\big)\cdot\big(d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) +$$
$$+3d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) - d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)\big)\Big] \le 0.$$

Мы показали необходимость. Осталось показать достаточность. Пусть теперь детерминант не положительный, то есть $C(x_1,x_2,x_3,x_4) \le 0$. Покажем, что $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ удовлетворяет неравенству (1). Из доказательства необходимости нашего утверждения у нас есть следующее:

$$C(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Big[d(x_1,x_2)^2 d(x_3,x_4)^2 - d(x_1,x_3)^2 d(x_2,x_4)^2 - d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2\Big]^2 -$$
$$-4d(x_1,x_3)^2 d(x_2,x_4)^2 d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2 \le 0.$$

Тогда

$$-2d(x_1,x_3)d(x_2,x_4)d(x_1,x_4)d(x_2,x_3) \le d(x_1,x_2)^2 d(x_3,x_4)^2 -$$
$$-d(x_1,x_3)^2 d(x_2,x_4)^2 - d(x_1,x_4)^2 d(x_2,x_3)^2 \le 2d(x_1,x_3)d(x_2,x_4)d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)$$

А это покажет, что

$$d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) \le d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) + d(x_1,x_4)d(x_2,x_3).$$

Квазиптолемеевы пространства. Начнём эту часть с одного простого примера: Пусть множество X состоит из четырёх точек x_1, x_2, x_3, x_4. Пусть на X задана полуметрика:

$$d(x_2,x_3) = d(x_3,x_4) = d(x_2,x_4) = 1,\ d(x_1,x_2) = d(x_1,x_3) = \frac{1}{2},\quad d(x_1,x_4) = 2.$$

Тогда пространство $b-(X,d)$ не является птолемеевым, так как не выполняется неравенство Птолемея:

$$d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) + d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) = 1 < 2 = d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)$$

Но, если мы умножим $d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)$ на $1-\frac{3}{4}$ то получим, что

$$d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) + d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) = 1 > \frac{1}{2} = \left(1-\frac{3}{4}\right)d(x_1,x_4)d(x_2,x_3).$$

Этот пример показывает, что мы можем определить новый тип пространства.

Определение 2. Полуметрическое пространство (X,d) называется $(\varepsilon-)$ *квазиптолемеевым* [1], если существует такое $\varepsilon \in (0,1)$, что для каждой четверки x_1,x_2,x_3,x_4 разных его точек, произведения расстояний

$$d(x_1,x_2)\ d(x_3,x_4),\ d(x_1,x_3)d(x_2,x_4),\ d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)$$

удовлетворяют неравенству

$$d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) + d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) \ge (1-\varepsilon)d(x_1,x_4)d(x_2,x_3). \qquad (2)$$

Из этого определения можно увидеть, что если пространство является квазиптолемеевым с параметром ε_0, то есть, если для его разных четырёх точек выполняется (2), тогда для всех $\varepsilon \in [\varepsilon_0,1)$ выполняется (2). Если (2) выполняется для всех $\varepsilon \in (0,1)$, тогда пространство (X,d) является птолемеевым. В [5] можно увидеть, что в метрическом птолемеевом пространстве (X,d) метрика $d(x,y)^\alpha$ является птолемеевой при $\alpha \in (0,1]$. А мы рассмотрим несколько полуметрик при $\alpha > 0$ и покажем их квазиптолемеевость при $\alpha > 1$. Здесь конечно можно сказать, что $d(x,y)^\alpha$ является квазиптолемеевой с параметром $\varepsilon = 1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}; \alpha > 1$. Это доказывается так же, как теорема 1.

Пусть $(X,d)-$ метрическое пространство. С помощью метрики $d(x,y)$ для любых $x,y \in X$ построим следующую функцию:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} (1+d)^\alpha, & x \neq y; \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$. Здесь $\rho(x,y)$ удовлетворяет условиям определения полуметрики.

Теорема 1. Пусть метрическое пространство (X,d) является птолемеевым. Тогда пространство (X,ρ) является птолемеевым при $0 < \alpha \le 1$, а при $\alpha > 1$ является квазиптолемеевым с параметром $\varepsilon = 1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X -$ различные точки и $d_{ij} = d\left(x_i, x_j\right)$, где $i, j \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$. Так как (X,d) птолемеево, $d_{12} \cdot d_{34} \leq d_{13} \cdot d_{24} + d_{14} \cdot d_{23}$, и так как оно метрическое

$$d_{12} \leq d_{13} + d_{32}, \qquad d_{12} \leq d_{14} + d_{24}, \qquad d_{34} \leq d_{31} + d_{24}, \qquad d_{34} \leq d_{32} + d_{24},$$

или эквивалентно можно получить $d_{12} + d_{34} \leq d_{13} + d_{23} + d_{24} + d_{14}$.

А теперь покажем, что (X,ρ) птолемеево при $0 < \alpha \leq 1$.

$$(1 + d_{12}) \cdot (1 + d_{34}) = 1 + d_{12} + d_{34} + d_{12} \cdot d_{34} \leq$$
$$\leq 2 + d_{13} + d_{24} + d_{14} + d_{23} + d_{14} \cdot d_{23} + d_{13} \cdot d_{24} =$$
$$= (1 + d_{13}) \cdot (1 + d_{24}) + (1 + d_{14}) \cdot (1 + d_{23})$$

то есть,

$$(1 + d_{12}) \cdot (1 + d_{34}) \leq (1 + d_{13}) \cdot (1 + d_{24}) + (1 + d_{14}) \cdot (1 + d_{23}) \tag{3}$$

Из (3) получим, что

$$(1 + d_{12})^{\alpha} \cdot (1 + d_{34})^{\alpha} \leq \left((1 + d_{13}) \cdot (1 + d_{24}) + (1 + d_{14}) \cdot (1 + d_{23})\right)^{\alpha} \leq$$
$$\leq (1 + d_{13})^{\alpha} \cdot (1 + d_{24})^{\alpha} + (1 + d_{14})^{\alpha} \cdot (1 + d_{23})^{\alpha}$$

при $0 < \alpha \leq 1$. Мы показали, что (X,ρ) является птолемеевым при $0 < \alpha \leq 1$.

А теперь осталось доказать, что (X,ρ) является квазиптолемеевым при $\alpha > 1$. Для этого необходимо условие, что для любых $a, b > 0; \beta > 1$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\beta} \leq \frac{a^{\beta} + b^{\beta}}{2}, \tag{4}$$

это в свою очередь, следует из того, что вещественная функция $x \to x^{\beta}$ является выпуклой (если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа $t \in [0,1]$ имеет место: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, то $f(x)$ называется *выпуклой*). Неравенства (4) можно встретить в [2]. Из [3] и [4] вытекает, что при $\alpha > 1$

$$(1 + d_{12})^{\alpha} \cdot (1 + d_{34})^{\alpha} \leq 2^{\alpha-1} \cdot \left[(1 + d_{13})^{\alpha} \cdot (1 + d_{24})^{\alpha} + (1 + d_{14})^{\alpha} \cdot (1 + d_{23})^{\alpha}\right]$$

или эквивалентно

$$\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\right) \cdot (1 + d_{12})^{\alpha} \cdot (1 + d_{34})^{\alpha} \leq$$
$$(1 + d_{13})^{\alpha} \cdot (1 + d_{24})^{\alpha} + (1 + d_{14})^{\alpha} \cdot (1 + d_{23})^{\alpha}.$$

Значит в этом случае в качестве ε можно выбрать $1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}$. (X,ρ) является квазиптолемеевым при $\alpha > 1$.

Список использованной литературы:

(1). Yuldashev B.E. Ptolemaic spaces and their generalizations. Letters in Nonlinear Analysis and its Applications 2 (2024). № 1, p. 28–34.

(2). Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2014.

(3). Blumenthal L.M. Theory and applications of distance geometry. New York, 1970.

(4). Zhanqi Z., Yingqing X. Strongly hyperbolic metrics on Ptolemy spaces. Hunan University, China, 2019.

(5). Ibragimov Zair., Hyperbolizing hyperspaces. Michigan Math. J.60, 2011.

(6). Довгошей А.А., Петров. Е.А. Птолемеевы пространства. "Сибирский математический журнал", март–апрель, 2011, том 52, № 2.

(7). Асеев В.В. Обобщённые углы в птолемеевых мёбиусовых структурах. "Сибирский математический журнал", март–апрель, 2018, том 59, № 2.