FIZIKA-MATEMATIKA

Bozorov Suxrob Bahodirovich (Guliston davlat universiteti "Matematika" kafedrasi; e-mail: suxrobbek_8912@mail.ru),
Dilshod Ravilovich Mansurov (Navoiy davlat universiteti "Matematika" kafedrasi; e-mail: dmansurovmath@gmail.com)

REGRESSIYA TENGLAMALARIDA NOMA'LUM PARAMETRLARNI BAHOLASH

Annotatsiya. *Ushbu maqolada regressiya tahlilining nazariy asoslari hamda regressiya tenglamalarida noma'lum parametrlarni baholash masalalari o'rganilgan. O'zgaruvchilar orasidagi statistik bog'liqlikni ifodalashda chiziqli, kvadratik, kubik va umumiy n-tartibli regressiya modellarini qurish yondashuvlari yoritilgan. Model parametrlarini baholashda eng kichik kvadratlar usulidan foydalanilgan va mos normal tenglamalar sistemalari keltirib chiqarilgan. Kuzatuv ma'lumotlari asosida regressiya tenglamalarini aniqlash, ularning amaliy tatbiqini ko'rsatish hamda qurilgan modellarning adekvatligini Fisher mezoni yordamida tekshirish masalalari bayon etilgan. Olingan natijalar regressiya tahlili turli amaliy jarayonlardagi bog'liqliklarni matematik modellashtirish va tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega ekanini ko'rsatadi.*

Kalit so'zlar: *regressiya tahlili, regressiya tenglamasi, chiziqli regressiya, kvadratik regressiya, kubik regressiya, n-tartibli regressiya, eng kichik kvadratlar usuli, parametrlarni baholash, normal tenglamalar, Fisher mezoni, korrelyatsion bog'liqlik.*

Бозоров Сухроб Баходирович (доцент кафедры "Математики" Гулистанского государственного университета; e-mail: suxrobbek_8912@mail.ru),
Мансуров Дилшод Равилович (доцент кафедры «Математика» Навоийского государственного университета; e-mail: dmansurovmath@gmail.com)

ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ В УРАВНЕНИЯХ РЕГРЕССИИ

Аннотация. *В данной статье исследуются теоретические основы регрессионного анализа и вопросы оценки неизвестных параметров в уравнениях регрессии. Рассмотрены подходы к описанию статистической зависимости между переменными с помощью линейных, квадратичных, кубических и общих регрессионных моделей n-го порядка. Для оценки параметров моделей использован метод наименьших квадратов, а также выведены соответствующие системы нормальных уравнений. На основе данных наблюдений показаны способы построения уравнений регрессии, их практическое применение и проверка адекватности построенных моделей с использованием критерия Фишера. Полученные результаты свидетельствуют о том, что регрессионный анализ является эффективным инструментом математического моделирования и исследования зависимостей в различных прикладных задачах.*

Ключевые слова: *регрессионный анализ, уравнение регрессии, линейная регрессия, квадратичная регрессия, кубическая регрессия, регрессия n-го порядка, метод наименьших квадратов, оценка параметров, нормальные уравнения, критерий Фишера, корреляционная зависимость.*

Bozorov Sukhrob Bakhodirovich (Associate Professor of the Department of Mathematics of Gulistan State University; e-mail: suxrobbek_8912@mail.ru),
Mansurov Dilshod Ravilovich (Associate Professor of the Department of Mathematics, Navoi State University; e-mail: dmansurovmath@gmail.com)

ESTIMATION OF UNKNOWN PARAMETERS IN REGRESSION EQUATIONS

Annotation. *This article examines the theoretical foundations of regression analysis and the problem of estimating unknown parameters in regression equations. Approaches to describing statistical relationships between variables using linear, quadratic, cubic, and general n-th order regression models are discussed. The least squares method is employed to estimate model parameters, and the corresponding systems of normal equations are derived. Based on observational data, the paper demonstrates the construction of regression equations, highlights their practical applications, and evaluates the adequacy of the fitted models using the Fisher criterion. The obtained results show that regression analysis is an effective tool for mathematical modeling and for studying dependencies in a wide range of applied problems.*

Keywords: *regression analysis, regression equation, linear regression, quadratic regression, cubic regression, n-th order regression, least squares method, parameter estimation, normal equations, Fisher criterion, correlation dependence.*

Kirish. Umuman, $Y = g(X)$ ko‘rinishidagi bog‘liqlikni X va Y o‘zgaruvchilar orasidagi juft bog‘liqlik deb qarash mumkin. Bunday bog‘liqliklar tabiiy va texnik fanlarda ko‘p uchrashi mumkin. Masalan,

- aylana yuzi uning radiusiga bog‘liq: $S = \pi R^2$; (bunda $Y = S$, $\pi = 3{,}14; R = X$);
- tezlik o‘zgarmas l masofani qancha vaqtda o‘tishga bog‘liq: $\upsilon = l / t$; $(Y = \upsilon,\ X = t)$;

Biz keltirib o‘tgan bunday bog‘liqliklar funksional deterministik, ya’ni tasodifiyatga bog‘liq bo‘lmagan bog‘liqliklarga misol bo‘la oladi. Bu turdagi bog‘liqliklar shu bilan xarakterlidirki, ularda o‘zgaruvchilardan birining har bir qiymatiga ikkinchisining aniq bir qiymati mos keladi. Ammo tabiatda, jamiyatda va boshqa amaliyot bilan bog‘liq sohalarda o‘zgaruvchilar orasidagi shunday bog‘liqliklar mavjudki, ulardan birining qiymatiga boshqasining aniq bir qiymati mos kelmasligi mumkin. Masalan, yerga solinayotgan o‘g‘it miqdori bilan hosildorlik orasida aniq funksional bog‘liqlik mavjud emas. Boshqacha qilib aytganda, ma’lum miqdordagi o‘g‘itni bir necha xil yer uchastkasiga solinsa, hosildorlik turlicha bo‘lishi mumkin. Xuddi shunday, inson bo‘yi va uning og‘irligi orasidagi bog‘liqlikni biror aniq formula bilan ifodalab bo‘lmaydi. Bunday noaniqliklar mavjudligidagi bog‘liqlikni stoxastik yoki statistik bog‘liqlik deb ataladi. Demak, bunday bog‘liklar shunisi bilan xarakterli ekanki, ulardan birining o‘zgarishi boshqasining taqsimoti o‘zgarishiga olib kelar ekan. Odatda bunday bog‘liqliklar tajribalar o‘tkazilishi natijasida aniqlanadi. O‘rganilayotgan kattaliklar X va Y bo‘lsin. Ular odatda belgilar yoki faktorlar deb ataladi. Belgilar, aslida, tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ular orasidagi statistik (yaki korrelyatsion) bog‘liqlik formulasi regressiya tenglamasi deb ataladi. Biz oldin ta’kidlab o‘tganimizdek, bunday bog‘liqlik aniq bo‘lmaganligi sababli $Y = g(X)$ regressiya tenglamasi ham ma’lum bir tasodifiy bo‘lgan ε xatolik bilan berilgan bo‘ladi $(Y = g(X) + \varepsilon)$. Regression tahlilning asosiy vazifasi aynan mana shu bog‘liqlikni aniqlash, ya’ni statistik nuqtaiy nazar bilan aytganda, baholashdan iboratdir. Bu yerda ε xatolik ham tasodifiy miqdor bo‘lib, uning qiymati juda kichik $(\varepsilon \approx 0)$, ya’ni o‘rta qiymati $M\varepsilon = 0$ deb faraz qilinadi. Aslida, $g(x)$ funksiya Y ning X dagi regressiyasi deyiladi va $g(x) = M(Y / X = x)$ shartli matematik kutilmadan iboratdir [1].

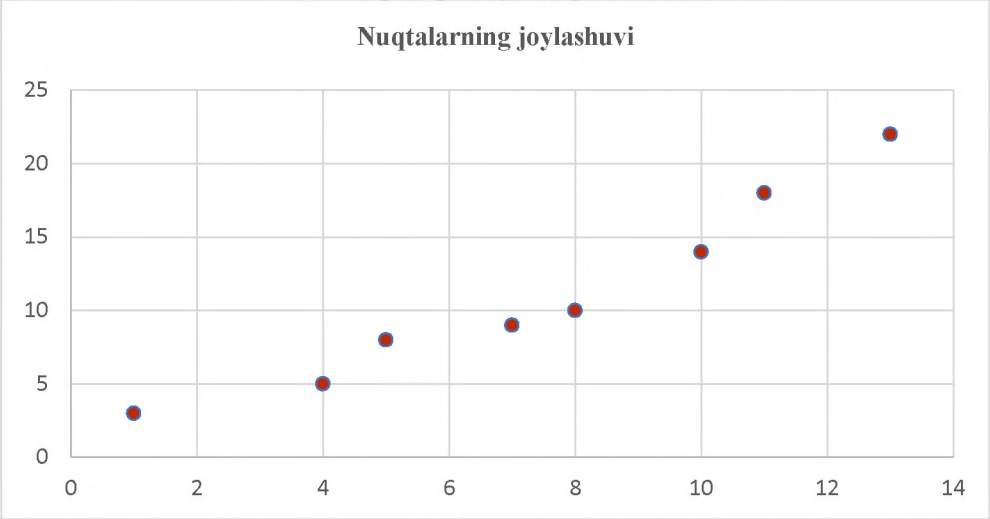
Regressiya tahlili va regressiya tenglamalarida noma’lum parametrlarni baholash masalalari matematik statistikaning muhim bo‘limlaridan biridir. Ushbu yo‘nalishning nazariy asoslari, statistik baholash usullari va ma’lumotlarni tahlil qilish tamoyillari [1], [8], [9] manbalarda keltirilgan. Ayniqsa, regressiya funksiyasini statistik bog‘liqlikni ifodalovchi vosita sifatida talqin qilish, parametrlarni baholash va statistik xulosalar chiqarish masalalari ushbu adabiyotlarda muhim o‘rin egallaydi. Chiziqli regressiya modellarini qurish asosan eng kichik kvadratlar usuli yordamida parametrlarni aniqlash masalalari [2], [3], [7] ishlarda batafsil bayon qilingan. Mazkur manbalarda regressiya koeffitsiyentlarini hisoblash, modelni kuzatuv ma’lumotlari asosida tanlash va natijalarni amaliy jihatdan talqin qilish usullari keltirilgan. Regressiya modelining sifatini baholash va uning adekvatligini tekshirish masalalari ham ilmiy adabiyotlarda alohida o‘rin tutadi. Xususan, Fisher mezoni asosida modelning statistik ahamiyatini tekshirish usullari [4], [10] manbalarda yoritilgan bo‘lib, ular regressiya tahlilida olingan natijalarning ishonchliligini asoslash imkonini beradi.

Shuningdek, ko‘phadli regressiya, jumladan kvadratik, kubik va umumiy n-tartibli regressiya modellarini qurish, ularning parametrlarini baholash hamda amaliy masalalarda qo‘llash [5], [6] adabiyotlarda ko‘rib chiqilgan. Shu sababli mazkur manbalar ushbu tadqiqotda regressiya tenglamalarida noma’lum parametrlarni baholash, model qurish va ularning amaliy ahamiyatini asoslash uchun nazariy hamda uslubiy asos vazifasini bajaradi.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqotda regressiya tahlilining nazariy va amaliy usullaridan foydalanildi. O‘zgaruvchilar orasidagi statistik bog‘liqlikni ifodalash maqsadida chiziqli, kvadratik va umumiy n-tartibli regressiya modellarini qurishga alohida e’tibor berildi. Model parametrlarini baholashda eng kichik kvadratlar usuli asos qilib olinib, unga mos tenglamalar sistemalari tuzildi va yechildi. Kuzatuv ma’lumotlari asosida regressiya koeffitsiyentlari hisoblanib, qurilgan modellarning tajriba natijalariga mosligi Fisher mezoni yordamida tekshirildi. Tadqiqot jarayonida regressiya tenglamalarini analitik ko‘rinishda hosil qilish, ularni jadval ma’lumotlari asosida hisoblash hamda natijalarni taqqoslash usullaridan foydalanildi.

Hayotiy masalalarni yechishda ikki o‘zgaruvchi orasidagi bog‘lanishni aniq analitik usulda ifodalab bo‘lmaydi. Buni 1-rasmda ko‘rishimiz mumkin. Ularni biror formula bilan, masalan chiziqli: $Y = b_0 + b_1 x$ parabolik: $Y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, kubik parabolik: $Y = a + bx + cx^2 + dx^3$ va h.k. orqali aniq ifodalab bo‘lmaydi. Ammo bu yuqorida ta’kidlab o‘tganimizdek, 1-rasmdagi nuqtalar orasidagi bog‘liqlikni ma’lum xatolik bilan chiziqli deb hisoblash mumkin. Buning uchun $Y = b_0 + b_1 x$ chiziqli regressiya tenglamasidagi noma’lum b_0 va b_1 parametrlarni baholash kerak bo‘ladi.

Chiziqli regressiya tenglamasini tuzish



1-rasm. Nuqtalar joylashuvi.

X va Y belgilar orasidagi bog‘liqlikni ifodalovchi korrelyatsiya jadvali (1-jadval) berilgan bo‘lsin [2]:

1-jadval

X	x_1	x_2	g g g	x_n
Y	y_1	y_2	g g g	y_n

Faraz qilaylik, (X, Y) belgilar juftligi $Y = b_0 + b_1 x$ chiziqli bog‘liqlikni qanoatlantirsin. Eng kichik kvadratlar usuliga asosan, 1-jadvaldagi X va Y larni kuzatish natijalari y_i va $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ sonlar orasi-dagi farqni minimumini qidiramiz:

$$U = U(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \hat{y}_i \right]^2 \to \min,$$

ya’ni

$$U = U(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right]^2 \to \min. \qquad (1)$$

Agar $\Delta_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (b_0 + b_1 x_i)$ deb belgilasak, $U = U(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2$ kvadratlar yig‘indisi-dan iborat funksiyaning shunday b_0 va b_1 parametrlari qiymatini aniqlashimiz zarurki, uning qiymati eng kichik bo‘lishi kerak. U ga minimal qiymatlarni beruvchi b_0 va b_1 larni quyidagi tenglamalar sistemasi yordamida topamiz [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial b_1} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Endi U ni (1) ifodasini qo‘llasak,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = (-2)\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (b_0 + b_1 x_i)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial b_1} = (-2)\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (b_0 + b_1 x_i)\right]\cdot x_i = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(3) sistemani b_0 va b_1 ga nisbatan yechib, quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\hat{b}_0 = \frac{\Delta_{b_0}}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i x_i)}{n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \quad \hat{b}_1 = \frac{\Delta_{b_1}}{\Delta} = \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i x_i) - \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{4}$$

(5) formula noma’lum b_0 va b_1 parametrlarning $\hat{b}_0$ va $\hat{b}_1$ baholaridir. Demak, izlanayotgan chiziqli regressiya tenglamasi $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x$ ko‘rinishda ekan.

Quyidagi korrelyatsiya 2-jadvalida X va Y belgilar orasidagi bog‘liqlikni ifodalovchi juft $\{(X_i; Y_i), i = \overline{1,8}\}$ sonlar berilgan:

2-jadval

X_i	**1**	**4**	**5**	**7**	**8**	**10**	**11**	**13**
Y_i	3	5	8	9	10	14	18	22

Unga mos kelgan korrelyatsiya 2-jadvalidagi sonlardan foydalanib $\hat{b}_0$ va $\hat{b}_1$ larni hisoblash maqsadida quyidagi 3-jadvalni tuzib olamiz:

3-jadval

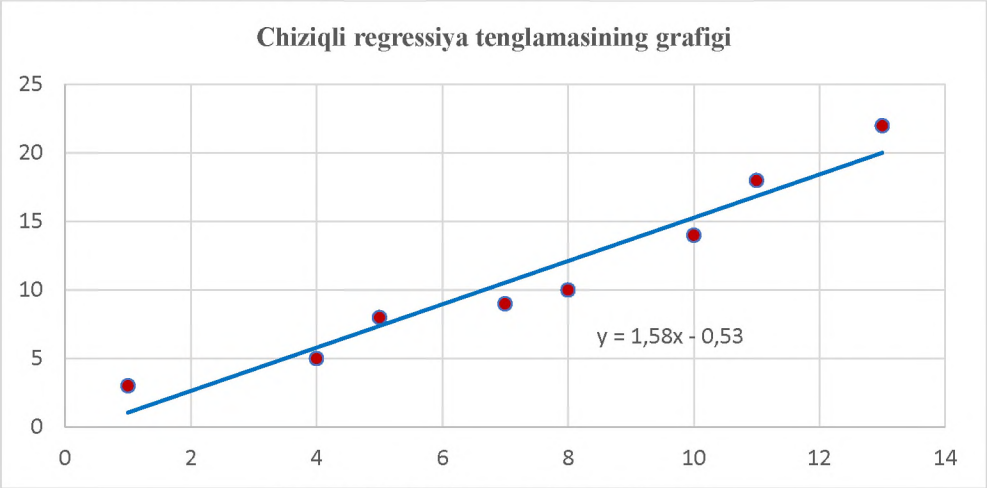
№	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	3	1	9	3
2	4	5	16	25	20
3	5	8	25	64	40
4	7	9	49	81	63
5	8	10	64	100	80
6	10	14	100	196	140
7	11	18	121	324	198
8	13	22	169	484	286
$\sum$	59	89	545	1283	830

3-jadval. Oxirgi satridagi yig‘indilardan foydalanib, (5) formulalarga asosan $\hat{b}_0$ va $\hat{b}_1$ larni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 59 \\ 59 & 545 \end{vmatrix} = 879; \quad \Delta_{b_0} = \begin{vmatrix} 89 & 59 \\ 830 & 545 \end{vmatrix} = -465; \quad \Delta_{b_1} = \begin{vmatrix} 8 & 89 \\ 59 & 830 \end{vmatrix} = 1389;$$

$$\hat{b}_0 = \frac{\Delta_{b_0}}{\Delta} = \frac{-465}{879} = -0,53; \quad \hat{b}_1 = \frac{\Delta_{b_1}}{\Delta} = \frac{1389}{879} = 1,58.$$

Demak, $\hat{y} = 1,58x - 0,53$ (2-rasm).



2-rasm. Chiziqli regressiya tenglamasi.

Endi jadvaldagi ma'lumotlar bilan chiziqli tenglamaga mos ma'lumotlar orasidagi farqni o'rganamiz. Shu maqsadda quyidagi 4-jadvalni tuzib olamiz:

4-jadval

№	x_i	y_i	$\hat{y}_i = 1,58 \cdot x_i - 0,53$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	1	6	$\hat{y}(1) = 1,05$	1,95	3,8025
2	4	4	$\hat{y}(4) = 5,79$	-0,79	0,6241
3	5	7	$\hat{y}(5) = 7,37$	0,63	0,3969
4	7	6	$\hat{y}(7) = 10,53$	-1,53	2,3409
5	8	10	$\hat{y}(8) = 12,11$	-2,11	4,4521
6	10	9	$\hat{y}(10) = 15,27$	-1,27	1,6129
7	11	11	$\hat{y}(11) = 16,85$	1,15	1,3225
8	13	9	$\hat{y}(13) = 20,01$	1,99	3,9601
$\sum$	59	62		1,95	18,512

3- va 4-jadvallardan foydalanib, y_i lar bo'yicha dispersiya S_y^2 va qoldiqlar yig'indisi $\overline{S}_y^2$ ni hisoblaymiz:

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right] = 41,839;$$

$$\overline{S}_y^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{18,512}{6} = 3,085.$$

Endi Fisherning F–kriteriysi statistikasini hisoblaymiz [4]:

$$F = \frac{S_y^2}{\overline{S}_y^2} = \frac{41,839}{3,085} = 13,562.$$

F–kriteriyning ozodlik darajalari juftligi $(U_1;U_2)$ bo‘lganidagi 5% lik kritik nuqtasini jadvalidan to-pamiz: $(U_1;U_2)=(k;n-k-1)=(1;6)$. Bu yerda: $U_1=k$, k – erkli o‘zgaruvchilar soni, $U_2=n-k-1$, n – kuzatuvlar soni: $F^T_{0,95}(1;6)=5,99$. Demak, $\widehat{F}>F^T_{0,95}(1;6)$ bo‘lganligi uchun $\widehat{F}=13,562>5,99$ biz aniqlagan $\widehat{y_i}=1,58\cdot x_i-0,53$ chiziqli regressiya tenglamasi tajriba natijalariga zid emas ekan, ya’ni, uni biz izlayotgan tenglama sifatida 5% lik xatolik bilan qabul qilishimiz mumkin.

Biz yuqorida X va Y belgilar orasidagi o‘rganilishi eng qulay bo‘lgan $Y=b_0+b_1\cdot x$ chiziqli regressiya tenglamasini qurib, uning parametrlari uchun kichik kvadratlar usuli yordamida (5) formulalarni keltirib chiqargan edik.

Kvadratik regressiya tenglamasini tuzish. Ammo amaliyotda X va Y belgilar orasidagi bog‘liqlik ixtiyoriy formada bo‘lishi mumkin. Masalan, u kvadratik ko‘rinishda bo‘lishi mumkin:

$$Y=a+b\cdot x+c\cdot x^2+\varepsilon.$$

Faraz qilaylik, (X,Y) belgilar juftligi $Y=a+b\cdot x+c\cdot x^2$ kvadratik bog‘liqlikni qanoatlantirsin. Eng kichik kvadratlar usuliga asosan, jadvaldagi X va Y larni kuzatish natijalari y_i va $\hat{y}_i=a+b\cdot x+c\cdot x^2$ sonlar orasidagi farqni minimumini qidiramiz:

$$U=U(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\hat{y}_i\right]^2\to\min,$$

ya’ni

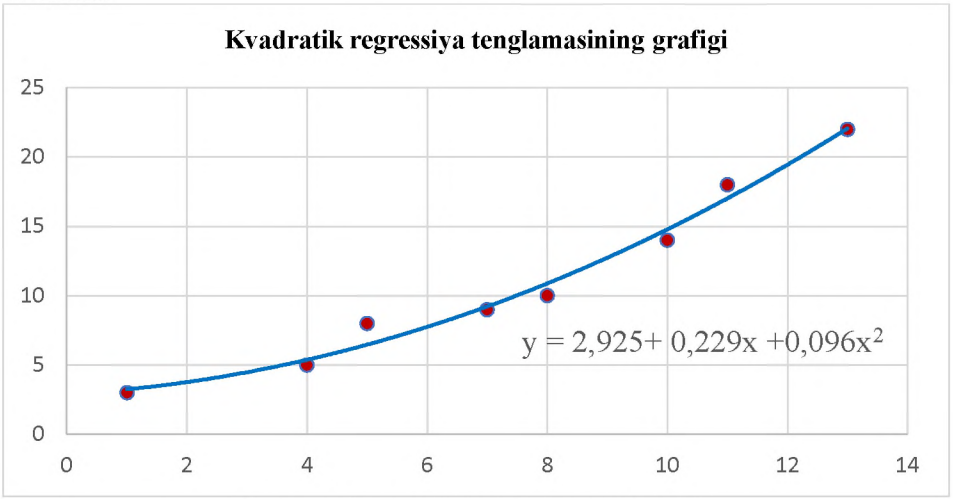
$$U=U(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(a+b\cdot x_i+c\cdot x_i^2\right)\right]^2\to\min. \qquad (5)$$

U ga minimal qiymatlarni beruvchi a, b va c lar [6] quyidagicha topiladi:

$$\frac{\partial U}{\partial a}=0,\ \frac{\partial U}{\partial b}=0,\ \frac{\partial U}{\partial c}=0. \qquad (6)$$

Endi U ni (6) ifodasini qo‘llasak, va sistemani yechsak aynan biz izlayotgan noma’lum a, b va c parametrlarning $\hat{a}$, $\hat{b}$ va $\hat{c}$ baholari kelib chiqadi.

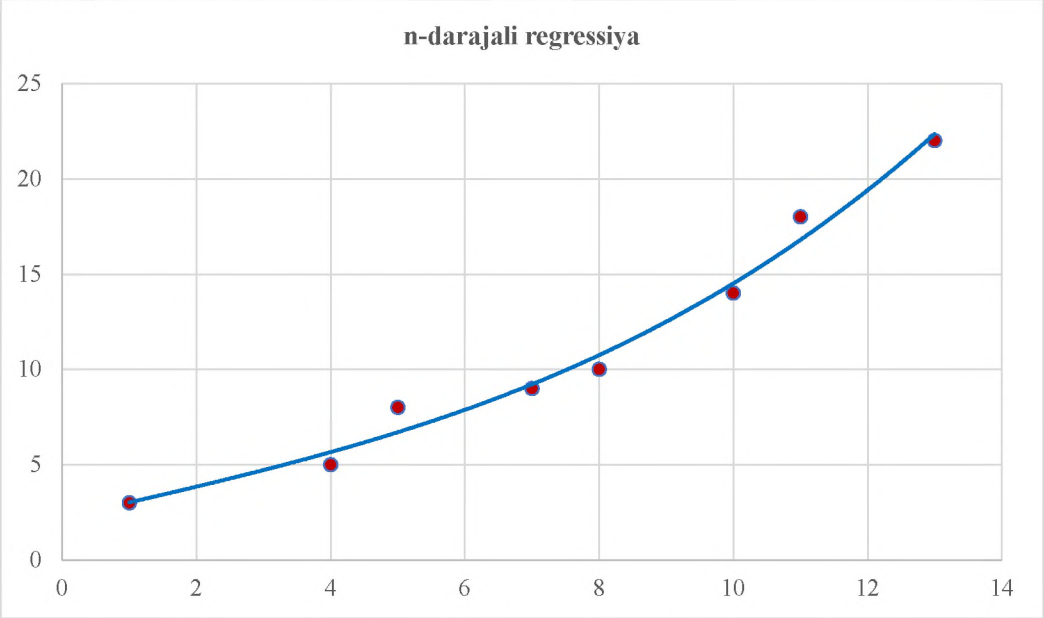
2-jadval asosida kvadratik regressiyani hisoblasak, $\hat{y}=2,925+0,229x+0,096x^2$ kvadrat funksiyaga ega bo‘lamiz.



3-rasm. Kvadratik regressiya tenglamasi.

Fisherning F-kriteriysi $F^T_{0,95}(1;6)=5,99.(\widehat{F}=50,4609108>5,99)$ yordamida tasdiqlash mumkinki kvadratik regressiya tenglamasi tajriba natijalariga zid emas.

n-tartibli regressiya tenglamasini tuzish. X va Y belgilar orasidagi bog‘liqlik ixtiyoriy formada bo‘lishi mumkin. Masalan, u n-tartibli $Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$ ko‘phad ko‘rinishida bo‘lishi mumkin (4-rasm).



4-rasm. Kubik regressiya tenglamasi.

Bu holda ham kichik kvadratlar usulidan foydalanib, $U = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots + a_n x_i^n \right) \right]^2$ xatolik funksiyasidan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ va a_n parametrlar bo‘yicha hosilalar olib, y_i noma’lumga nisbatan y_i tenglamalarni tuzib, quyidagi normal tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial a_0} = (-2) \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots + a_n x_i^n \right) \right] = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial a_1} = (-2) \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots + a_n x_i^n \right) \right] \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial a_2} = (-2) \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots + a_n x_i^n \right) \right] \cdot x_i^2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial U}{\partial a_n} = (-2) \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots + a_n x_i^n \right) \right] \cdot x_i^n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Ushbu sistemani normal ko‘rinishda ifodalab olamiz:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^n = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_3 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i \right), \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \ldots + a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \cdot y_i \right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} + \ldots + a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^n \cdot y_i \right), \end{cases} \tag{8}$$

(8) sistemani yechish uchun quyidagi ifodalarni tuzib olamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \end{vmatrix} \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i \right) & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 y_i \right) & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^n y_i \right) & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i \right) & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 y_i \right) & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^n y_i \right) & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i \right) & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 y_i \right) & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^n y_i \right) & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \end{vmatrix};$$

$$\ldots \qquad \Delta_{a_n} = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i \right) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 y_i \right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^n y_i \right) \end{vmatrix}.$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}; \hat{a}_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}; \hat{a}_2 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}; \hat{a}_3 = \frac{\Delta_{a_3}}{\Delta}; ...; \hat{a}_n = \frac{\Delta_{a_n}}{\Delta} \quad (9)$$

(20) formulalarda aynan biz izlayotgan noma'lum $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ va a_n parametrlarning $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_{n-1}$ va $\hat{a}_n$ baholari keltirilgandir. Demak, izlanayotgan kvadratik regressiya tenglamasi $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2 + \hat{a}_3 x^3 + ... + \hat{a}_n x^n$ ko'rinshda ekan. Shuni eslatib o'tamizki, bu bog'liqlik X va Y lar orasidagi emas, balki X va Y lar orasidagi kvadratik bog'liqlikdir. Demak, Y va $\hat{Y}$ belgilar orasida ma'-lum farq (xatolik) mavjuddir. Y aynan U orqali ifodalangan edi [10].

Xulosa. Mazkur tadqiqotda regressiya tenglamalarida noma'lum parametrlarni baholashning nazariy va amaliy jihatlari o'rganildi. O'zgaruvchilar orasidagi statistik bog'liqlikni ifodalashda chiziqli, kvadratik hamda umumiy n-tartibli regressiya modellarini qurish usullari ko'rib chiqildi. Model parametrlarini aniqlashda eng kichik kvadratlar usulining samarali ekanligi va bu usul yordamida mos normal tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkinligi ko'rsatildi. Kuzatuv ma'lumotlari asosida qurilgan regressiya tenglamalarining adekvatligi Fisher mezoni yordamida tekshirilib, olingan natijalar modellarning amaliy jihatdan qo'llashga yaroqli ekanini tasdiqladi. Shuningdek, regressiya tahlili turli jarayonlar orasidagi bog'liqliklarni matematik modellashtirish, tahlil qilish va prognozlashda muhim vosita ekanligi asoslandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

[1]. Introduction to Mathematical Statistics. Hogg R., McKean J., Craig A. Pearson Education, 2013.

[2]. Applied Regression Analysis. Draper N., Smith H. Wiley, 1998.

[3]. Introduction to Linear Regression Analysis. Montgomery D., Peck E., Vining G. Wiley, 2012.

[4]. Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. Walpole R., Myers R., Myers S., Ye K. Pearson, 2012.

[5]. The Elements of Statistical Learning. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. Springer, 2009.

[6]. An Introduction to Statistical Learning. James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R. Springer, 2013.

[7]. Regression Analysis by Example. Chatterjee S., Hadi A. Wiley, 2006.

[8]. Mathematical Statistics and Data Analysis. Rice J. Cengage Learning, 2006.

[9]. Mathematical Statistics with Applications. Wackerly D., Mendenhall W., Scheaffer R. Cengage Learning, 2008.

[10]. Statistical Methods. Snedecor G., Cochran W. Iowa State University Press, 1989.

Xolmatova Shahrizoda (Axborot texnologiyalari va menejment universiteti 1-kurs magistratura Matematika mutaxassisligi magistranti)

SHARTSIZ OPTIMALLASHTIRISH USULLARINI TAQQOSLASH

Annotatsiya. *Mazkur maqolada shartsiz optimallashtirish usullari nazariy va amaliy jihatdan taqqoslanadi. Gradient, Nyuton, kvazi-Nyuton (BFGS, L-BFGS) hamda konjugat gradient algoritmlarining yaqinlashuv tezligi, hisoblash murakkabligi va barqarorlik xossalari tahlil qilinadi. Tadqiqot jarayonida turli tipdagi test funksiyalari asosida empirik sinovlar o'tkazilib, algoritmlarning real samaradorligi baholanadi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, usul tanlovi funksiyaning tuzilishi va o'lchamiga bog'liq bo'lib, kvazi-Nyuton algoritmlari tezlik va resurs tejamkorligi o'rtasida optimal muvozanatni ta'minlaydi.*

Kalit so'zlar*: shartsiz optimallashtirish, gradient usuli, Nyuton usuli, BFGS, L-BFGS, konjugat gradient, yaqinlashuv tezligi, hisoblash murakkabligi.*

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. *В статье проводится сравнительный анализ методов безусловной оптимизации с теоретической и практической точек зрения. Рассматриваются градиентный метод, метод Ньютона, квазиньютоновские алгоритмы (BFGS, L-BFGS) и метод сопряжённых градиентов. Исследуется скорость сходимости, вычислительная сложность и устойчивость алгоритмов. На основе тестовых функций различного типа проведены численные эксперименты, позволившие оценить эффективность методов в задачах различной размерности.*

Ключевые слова*: безусловная оптимизация, градиентный метод, метод Ньютона, BFGS, L-BFGS, вычислительная сложность.*

COMPARISON OF UNCONSTRACTED OPTIMIZATION METHODS

Annotation. *This paper presents a comparative analysis of unconstrained optimization methods from both theoretical and practical perspectives. The gradient method, Newton's method, quasi-Newton*