(7). Lutz M. Learning Python. O‘Reilly Media, 5th Edition, 2013.
(8). https://docs.python.org/3/Python rasmiy hujjatlari.
(9). https://numpy.org/NumPy kutubxonasi rasmiy sayti.
(10). https://pandas.pydata.org/Pandas kutubxonasi rasmiy hujjatlari.
(11). https://matplotlib.org/ Matplotlib grafik kutubxonasi.
(12). https://www.sympy.org/SymPy: matematik ifodalarni manipulyatsiya qilish uchun Python kutubxonasi.

Мадиримов Маматсали (профессор, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент, Узбекистан),
Мухаммадиев Самариддин Боймурат угли (преподаватель, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент, Узбекистан; e-mail: niddiramas.uz@gmail.com),
Жураев Турсунбой Файзиевич (профессор кафедры «Общей математики» Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами, доктор физико-математических наук, Ташкент, Узбекистан; e-mail: tursunzhuraev@mail.ru)

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВА $Set(X)$

Аннотация. *В данной работе показывается, что множества всех непустых подмножеств* $\mathrm{Set}(X)$ *топологического пространства* X *с экспоненциальной топологией является ковариантным функтором в категории* TOP *-топологических пространств и их непрерывных отображений в себя. Показывается, что функтор* Set *является ковариантным функтором в категории топологических пространств и непрерывных отображений в себя, определяется псевдометрика в пространстве* $\mathrm{Set}(X)$*, выделяются компактные, связные, конечные и счетные подпространства пространства* $\mathrm{Set}(X)$*. А также показываются различные виды связности, мягкие локально мягкие, и* $n-$*мягкие отображения в* $\mathrm{Set}(X)$*. Приводится один интересный пример на категорию* TOP_Y*. Доказывается, что функтор* Set *переводит открытые отображения в открытые, стягиваемые и локально стягиваемые пространства. Далее изучается вопрос распространения отображений в пространстве* $\mathrm{Set}(X)$ *и выделены, из каких множеств состоят базисные открытые множества пространства* $\mathrm{Set}(X)$*.*

Ключевые слова: *функтор, отображения, связность, мягкие отображения, стягиваемость, гомотопия, абсолютные экстензоры.*

$Set(X)$ FAZONING TOPOLOGIK XOSSALARI HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada biz ko'rsatkichli topologiyaga ega* X *topologik fazoning barcha bo'sh bo‘lmagan kichik to‘plamlari to‘plami* Top *-topologik bo‘shliqlar toifasidagi kovariant funktor va ularning uzluksiz o‘z ichiga joylashishini ko‘rsatamiz. Ko‘rsatilgandek,* Set *funktor topologik bo‘shliqlar toifasidagi kovariant funktor va o‘z-o‘zidan uzluksiz xaritalashlar,* $\mathrm{Set}(X)$ *fazoda psevdometrik aniqlanadi,* Set *fazoning ixcham, bog‘langan, chekli va hisoblanuvchi pastki fazolari ajratiladi. Shuningdek, u* $\mathrm{Set}(X)$*da turli xil ulanish turlarini, yumshoq mahalliy yumshoq va* $n-$*yumshoq xaritalarni ko‘rsatadi. Bir qiziqarli misol* TOP_Y *toifasi uchun berilgan.* Set *funktori ochiq, qisqaruvchi va mahalliy qisqaruvchi bo‘shliqlar bilan qisqaruvchi va mahalliy qisqaruvchi bo‘shliqlar bilan ochiq xaritalarni xaritalashi isbotlangan. Keyinchalik,* $\mathrm{Set}(X)$ *fazoda tasvirlarni taqsimlash masalasi o‘rganiladi va* $\mathrm{Set}(X)$ *fazoning asosiy ochiq to‘plamlarini tashkil etuvchi to‘plamlar aniqlanadi.*

Kalit so‘zlar: *funktor, bog‘lamlilik, akslantirish, tortilish, gomotopiya, absolut ekstensorlar.*

ON THE TOPOLOGICAL PROPERTIES OF THE SPACE $Set(X)$

Annotation. *In this paper we show that the set of all non-empty subsets* $\mathrm{Set}(X)$ *of a topological space X with the exponential topology is a covariant functor in the category of* TOP *-topological spaces and their continuous mappings into themselves. We show that the functor* Set *is a covariant functor in the category of topological spaces and continuous mappings into themselves, define a pseudometric in*

$\mathrm{Set}(X)$, *and distinguish compact, connected, finite, and countable subspaces of* Set. *We also show various types of connectivity, soft, locally soft, and* n*-soft mappings in* $\mathrm{Set}(X)$. *We give one interesting example on the category* TOP_Y. *We prove that the functor* Set *maps open mappings to open mappings, and maps contractible and locally contractible spaces to contractible and locally contractible spaces. Next, the question of the distribution of mappings in the space* $\mathrm{Set}(X)$ *is studied and the sets that make up the basic open sets of the space* $\mathrm{Set}(X)$ *are identified.*

Keywords: *Functor, map, contractibles, soft maps, connected, homotopies, absoluts extensors.*

Введение. Будем говорить, что задана категория K, если задан класс O и Mor элементов, называемых объектами категории K, причем

1) для каждых объектов (A,B) из K задано множество $Mor(A,B)$, называемое морфизмом A в B;

2) для каждой тройки объектов (A,B,C) из K задано отображение $\mu : Mor(A,B)\times Mor(B,C) \to Mor(A,C)$ (образ $\mu(u,v)$ пары $(u,v) \in Mor(A,B)\times Mor(B,C)$ обозначается при этом через $v \cdot u$ и называется композицией морфизмов u и v;

3) множества $Mor(A,B)$ и композиция морфизмов удовлетворяют следующим аксиомам:

а) композиция ассоциативна, т.е. для каждой тройки морфизмов u,v,ω выполнено равенство $\omega \cdot (u \cdot v) = (\omega \cdot u) \cdot v$;

б) Для каждого объекта A из K существует морфизм $1_A : A \to A$, называемый тождественным морфизмом объекта A, такой $1_A \cdot u = u$ и $v \cdot 1_A = v$ для любых морфизмов $u \in Mor(B,A)$ и $v \in Mor(A,B)$;

в) все пары (A,B) и (A',B') различны, то пересечение множеств $Mor(A,B)$ и $Mor(A',B')$ пусто.

Важным примером категории является категория TOP всех топологических пространств и их непрерывных отображений. Множество $Mor(X,Y)$ для любых двух топологических пространств при этом есть простое множество всех непрерывных отображений из X в Y. Под композицией понимается обычная композиция отображений.

Совершенно аналогично, категорию образуют и совокупности различных топологических пространств при подходящем выборе характеризующих их свойства. К примеру, категорией является класс всех компактных пространств и их непрерывных отображений и т.д.

Пример. Категория TOP_Y. Еще одним примером категории является категория TOP_Y. Объектами этой категории являются непрерывные отображения в данное топологическое пространство Y. Морфизмом, связывающим для объекта $f_1 : X_1 \to Y$ и $f_2 : X_2 \to Y$ является такое отображение $g : X_1 \to X_2$, что $f_2 g = f_1$. Если быть предельно точным, то морфизмом является треугольная коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 \\ & {\scriptstyle f_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f_2} & \\ & Y & \end{array} \qquad (1)$$

Тождественным отображением объекта $f : X \to Y$ является тождественное отображение id_X.

Произведение семейства объектов в категории TOP_Y определяется следующим образом: Пусть дано семейство отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$. В топологическом произведение $Y^A = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, где $Y_\alpha = Y$ для каждого $\alpha \in A$ рассмотрим диагональ

$$\Delta(Y^A) = \{\{y_\alpha : \alpha \in A\} \in Y^A : y_\alpha = y_\beta, \forall \alpha, \beta \in A\}.$$

Обозначим через X полный прообраз диагонали $\Delta(Y^A)$ относительно отображения $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, а через f_A ограничение этого отображения на множество X. Естественный гомеоморфизм диагонали $\Delta(Y^A)$ на пространство Y обозначим через δ_A. Композицию $\delta_A f_A$ обозначим через f. Пространство X будем называть веерным произведением пространств X_α относительно отображений f_α. Если Y одноточечно, то веерное произведение, как легко видеть, совпадает с обычном. Отображения f называется послойным произведением отображений f_α. Можно проверить, что послойное произведение f отображений f_α является произведением объектов f_α в категории TOP_Y. Условимся также через φ_α обозначать ограничения проекций $\pi_\alpha : \Pi\{X_\alpha : \alpha :\in A\} \to X_\alpha$ на X и называть их проекциями веерного произведения. Легко видеть, что для любого $\alpha \in A$ выполняется равенство $f = f_\alpha \varphi_\alpha$.

Каждое топологическое пространство можно отождествить с его отображением в некоторое фиксированное одноточечное пространство и, следовательно категория TOP является подкатегорией категории TOP_Y. Мы не будем вдаваться в подробности и излагать основы теории экстензоров с общекатегорной точки зрения (хотя понятие экстензора имеет категорную природу). Отметим только, что по некоторым соображениям, в отличие от классического подхода, сочли целесообразным изложить основы теории абсолютных экстензоров именно в категории TOP_Y.

Пусть $\mathcal{G} = (V, \mathfrak{M})$ и $\mathcal{G}' = (V', \mathfrak{M})$ две категории. Отображение $\mathcal{F} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, переводящее объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется ковариантным (контравариантным) функтором из категории $\mathcal{G}$ в категорию $\mathcal{G}'$, если:

1) для всякого морфизма $f : X \to Y$ из категории $\mathcal{G}$ морфизм $\mathcal{F}(f)$ действует $\mathcal{F}(X)$ в $\mathcal{F}(Y)$ (из $\mathcal{F}(X)$ в $\mathcal{F}(Y)$);

2) $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$ для всякого $X \in V$;

3) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ $(\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f))$;

Пусть $\mathcal{F}_i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, $i = \overline{1,2}$ два ковариантных функтора из категории $\mathcal{G} = (V, \mathfrak{M})$ в категории $\mathcal{G}' = (V', \mathfrak{M})$. Семейство морфизмов $\Phi = \{f_X : \mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{F}_2(X), x \in V\} \subset V'$ называется естественным преобразованием функ-тора $\mathcal{F}_1$ в функтор $\mathcal{F}_2$, если для всякого морфизма $f : X \to Y$ категории $\mathcal{G}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(X) & \xrightarrow{f_X} & \mathcal{F}_2(X) \\ \mathcal{F}_1(f)\downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_2(X) \\ \mathcal{F}_1(Y) & \xrightarrow{f_Y} & \mathcal{F}_1(Y) \end{array} \qquad (2)$$

Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ - функторы, действующие из категории V в себя. Функтор $\mathcal{F}_1$ называется подфунктором (надфунктором) функтора $\mathcal{F}_2$, если существуют такое естественное преобразо-

вание $\Phi = \{f_X\} : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ что всякое отображение f_X - вложение (эпиморфизм). Во втором случае функтор $\mathcal{F}_2$ называется функтор-функторов функтора $\mathcal{F}_1$.

Приведём общепринятые, обозначения определение и некоторые свойства нормальности ковариантного функтора $F : Comp \to Comp$, действующего в категории компактов и непрерывных отображений в себя приведенных работах [1-8]. Говорят, что функтор F:

1. Сохраняет пустое множество и точку, если $F(\varnothing) = \varnothing$ и $F(\{1\}) = \{1\}$, где через $\{k\}$, $k \geq 0$ мы обозначаем множество неотрицательных целых чисел-$\{0,1,...,k-1\}$, меньших k. В этой терминологии $\{0\} = \varnothing$;

2. Мономорфен, если для всякого (топологического) вложения. $f : A \to X$ отображение $F(f) : F(A) \to F(X)$ является вложением;

3. Эпиморфен, если для всякого отображения $f : X \to Y$ на Y отображение $F(f) : F(X) \to F(Y)$ является также отображением "на";

4. Сохраняет пересечения, если для любого семейства $\{A_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств бикомпакта X и тождественных вложений $i_\alpha : A_\alpha \to X$, отображение $F(i) : \bigcap \{F(A_\alpha) : \alpha \in A\} \to X$, определяемое равенством $F(i)(\alpha) = F(i_\alpha)(\alpha)$, является вложением для всякого $\alpha \in A$;

5. Сохраняет прообразы, если для всякого отображения $f : X \to Y$ и всякого замкнутого множества $A \subset Y$ отображение $F\left(f|_{f^{-1}(A)}\right)\left(f^{-1}(A)\right) \to F(A)$ является гомеоморфизмом;

6. Сохраняет вес, если $\omega(F(X)) = \omega(X)$ для бесконечного бикомпакта X. Наименьшее кардинальное $\omega(X)$ число, являющееся мощностью какой-либо базы бикомпакта X, называется весом пространства X и обозначается через $\omega(X)$;

7. Непрерывен, если для всякого обратного спектра $S = \{X_\alpha; \pi_\beta^\alpha : \alpha \in A\}$ из бикомпактов, гомеоморфизмом является отображение $f : F(\lim S) \to \lim F(S)$, которой есть предел отображений $F(\pi_\alpha)$, если $\pi_\alpha : \lim S \to X_\alpha$ – сквозные проекции спектра S.

Пусть X топологические пространство. Обозначим через $\mathrm{Set}(X)$ семейство всех непустых его подмножеств. т.е. $\mathrm{Set}(X) = \{F : F \subset X, F \neq \varnothing\}$. Пусть $\gamma = \{F_1, F_2, F_3, ..., F_s\}$ - конечное семейство непустых открытых подмножеств пространства X т.е. $\gamma = \{F_1, F_2, F_3, ..., F_s\}$, где $F_i \neq 0$ и F_i - открыто в X. Рассмотрим множество вида:

$$O_\gamma(F_1, F_2, ..., F_s) = \{A : A \subset \bigcup_{i=1}^{s} F_i \text{ и } A \cap F_i \neq \varnothing \text{ для } i = \overline{1,s}\}.$$

Семейство всех множеств этого вида $O(F_1, F_2, ..., F_s)$, т.е. $\mathcal{B} = \{O(F_1, F_2, ..., F_s) : F_i$ – открыто в X и непусто$\}$ образуют по определению базу экспоненциальной топологии Вьеториса множества $\mathrm{Set}\ X$.

Если X является метрическим пространством с метрикой ρ, то следуя по Хаусдорфу, на семействе $\mathrm{Set}(X)$ естественно ввести псевдометрику ρ'_H с помощью формулы:

$$\rho'_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\rho(a,B), \sup_{b\in B}\rho(b,A)\},$$

т.е. топологическое пространство с этой ρ'_H псевдометрикой Хаусдорфа является $(\mathrm{Set}(X), \rho'_H)$ псевдометрическим пространством.

Напомним, что отображение $\rho(x,y): X\times X \to R_+$ называется псевдометрикой на множестве X, если $\rho(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

П1. $\rho(x,x) = 0$ для любого X;

П2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для любого $x\in X$, $y\in X$;

П3. $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ для любых $x,y,z\in X$.

Если мы рассматриваем семейство $\exp X = \{F : F\subseteq X, F - \text{замкнуто в } X\}$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства X. Это псевдометрика ρ'_H Хаусдорфа будет метрикой на $expX$. Очевидно, что пространство $\exp X$ является подпространством пространства $\mathrm{Set}(X)$.

Рассмотрим отображение $i: X \to \mathrm{Set}(X)$, ставящее в соответствие каждой точке x множество $i(X)$, состоящее в точности из одной этой точки x, т.е. $i(x) = \{x\} \in \mathrm{Set}(X)$. Для этого отображение i имеет место равенство

$$i^{-1}(O(F_1, F_2, ..., F_k)) = \bigcap_{i=1}^{k} F_i . \qquad (3)$$

Это означит, что отображение i непрерывно. Для семейства γ, состоящего из одного множества Γ, получим отсюда, что $i(\Gamma) = O(\Gamma)\bigcap X$. Значит, $i-$ открытое отображение. Так как оно взаимно однозначно, то в силу равенства (3) оно будет топологическим вложением пространства X в пространство $\mathrm{Set}(X)$. Значит, для любого топологического пространства X можем считать что X -топологически лежит в $\mathrm{Set}(X)$.

Тем самым для любого топологического пространства X определено топологическое пространство $\mathrm{Set}(X)$, которое топологически содержит данное пространство X в качестве подмножества.

Каждое отображение $f: X\to Y$ можно считать следующем образом $f: X\to Y \to \mathrm{Set}Y$. Значит для каждого отображения $f: X\to \mathrm{Set}(Y)$ обозначим через $\mathrm{Set}(f): \mathrm{Set}(X) \to \mathrm{Set}(Y)$ или, коротко, через $\mathrm{Set}(f)$- отображение, определенной формулой:

$(\mathrm{Set}\, f)(A) = \cup\{f(a) : a\in A\}$ для каждого $A\in \mathrm{Set}(X)$.

Имеет место следующая:

Лемма 1[1]. Если $f: X\to Y$ непрерывное отображение между топологическими пространствами X и Y, то $\mathrm{Set}(f): \mathrm{Set}(X) \to \mathrm{Set}(Y)$ непрерывное отображение между пространствами $\mathrm{Set}(X)$ и $\mathrm{Set}(Y)$.

В данном случае для любого непрерывного отображения $f: X\to Y$ имеет место следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_X & & \downarrow i_Y \\ \mathrm{Set}(X) & \xrightarrow{\mathrm{Set}(f)} & \mathrm{Set}(Y) \end{array} \qquad (4)$$

Пусть X топологическое пространство. Обозначим через $\exp X = \{F : \overline{F} = F, F \subseteq X, F \neq \varnothing\}$ семейство всех непустых его замкнутых подмножеств;

$\exp^c(X) = \{F : F -$ компактно; $F \subseteq X\}$ -семейство всех компактных подмножеств;

$\exp^{con}(X) = \{F : F -$ связно, $F \subseteq X\}$ - семейство всех связных подмножеств;

$\exp^{ccon}(X) = \{F : F -$ связно и $F -$ компактно $F \subseteq X\}$ - семейство всех связных компактных подмножеств пространства X.

Каждое из этих семейств будем рассматривать вышеназванной экспоненциальной топологией Вьеториса.

Заметим, что для любого пространства X каждое из этих топологических пространств является подпространством пространства $Set(X)$. Получается следующая цепочка пространств:

$$\exp^{ccon}(X) \subseteq \exp^{con}(X) \subseteq \exp(X) \subseteq Set(X) \qquad (5)$$

$$\exp^c(X) \subseteq \exp X \qquad (6)$$

Определение [2]. Непустое пространство X называется $n-$связным (обозначается $X \in C^n$), если всякое непрерывное отображение $f : S^n \to X$ с гомотопно постоянному отображению $f : S^n \to \{x_0\}$ где $x_0 \in X$.

Данное определение эквивалентно следующему:

Если всякое отображение $f : S^r \to X$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\widetilde{f} : D^{r+1} \to X$. где $BdD^{r+1} = S^r$, D^{r+1} - замкнутый замкнутый круг размерности $r+1$ в евклидовом пространстве R^{r+1} через $BdD^{r+1} -$ обозначается граница D^{r+1}. Напомним, что пространство X называется локально $k-$связным (обозначается, $X \in LC^n$), если оно локально $k-$связно при $k = 0,1,...,n$, т.е. если для всякой точки $y_0 \in X$ и всякой ее окрестности V существует другая ее окрестность V_0, содержащаяся в V и такая, что всякое отображение $f : S^k \to V_0$, где $k \leq n$, гомотопно постоянному отображению $\widetilde{f} : S^k \to V$.

Легко видеть, (локальная) $0-$связность есть просто (локальная) линейная связность. При $k = 1$ наше определение эквивалентно стандартному определению (локальной) односвязности.

Напомним так же, что $X \in C$ (соответственно, $X \in LC$) означает стягиваемость (соответственно, локальную стягиваемость) пространства X.

а) $C \Rightarrow C^\infty \Rightarrow C^n$, где $n = 0,1,2,...$

б) $LC \Rightarrow LC^\infty \Rightarrow LC^n$, где $n = 0,1,2,...$

в) $C^n \Rightarrow C^m$ при $n \geq m$.

г) $LC^n \Rightarrow LC^m$ при $n \geq m$.

Напомним, что пространство X называется линейно связным, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ найдется соединяющий их путь в X. т.е. Существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$ такое, что $f(0) = x_0$ и $f(1) = x_1$. Пространство X называется стягиваемым, ес-

ли тождественное отображение $id_X : X \to X$ гомотопно постоянному отображению $const_{x_0} : X \to x_0$, переводящему все X в точку $x_0 \in X$.

Принадлежность $X \in C^k$ эквивалентно следующему:

Для любого симплекса T размерности ≥ 1, всякое непрерывеное отображение имеет такое непрерывное продолжение $F : T \to X$, что всякое базисное множество O, пространства X, содержащее $f(A)$, содержит и $F(T)$, где A - объединение произвольного множества граней симплекса T размерности ≥ 1, включая все одномерные.

Теперь нам нужно ℓ_2 гильбертово пространство, точками этого пространства является всевозможные последовательности $x = \{x_k : k \in N\}$ действителных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ т.е. $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$; а норма (метрика) элемента $x \in \ell_2$ задается по формуле

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Имеет место следующая

Теорема [4]. Гильбертово пространство ℓ_2, рассматриваемое как топологическое пространство гомеоморфно счетной бесконечной степени R^{ω} действительной прямой. т.е. $\ell_2 \simeq \prod_{n=1}^{\infty} R^n$.

В данном случае n-мерное евклидово пространство R^n можно определить как подпространство гильбертова ℓ_2 пространства, состоящее из тех точек $x = \{x_k : k \in N\}$ из ℓ_2, для которых $x_k = 0$ при всех $k > n$.

Система точек $x^i = \{x_k^i\}, i = 0,1,2,...,m$, из ℓ_2 называется независимой, если их линейная комбинация, $\mu_0 x^0 + \mu_1 x^0 + ... + \mu_m x^m$, где $\mu_0 + \mu_1 + ... + \mu_m = 0$ равно нулю, лишь когда все $\mu_i = 0$.

Если система точек $x^i, i = 0,1,...,m$ независима, то совокупность точек $x \in \ell_2$ представимых в виде $x = t_0 x^0 + t_1 x^1 + ... + t_m x^m$, где $t_i \geq 0$ и $t_0 + t_1 + ... + t_m = 1$ называется (замкнутым) m–мерным симплексом с вершинами $x^0, x^1, x^2, ...x^m$ обозначается через $T(x^0, x^1, x^2, ...x^m)$ коэффициенты $t_0, t_1, t_2, ...t_m$ однозначное определенные точкой x и однозначно определяющие эту точку, называется ее барицентрическими, (в барицентрической системе координат, состоящей из точек $x^0, x^1, x^2, ...x^m$). Если $T -$ (замкнутый) m-мерный симплекс с вершинами $x^0, x^1, x^2, ...x^m$, то множество всех точек $x \in T$, все барицентрические координаты в системе $x^0, x^1, x^2, ...x^m$ положительны называется открытым m-мерным симплексом (с теми вершинами, что T) и обозначается через $< T >$. Разность $T \setminus < T >= BdT$ называется границей симплекса T. Под гранью симплекса T мы понимаем симплекс T, все вершины которого являются вершинами заданного симплекса T. Множество (лежащее в гильбертовом пространстве), представимое в виде конечного (или локально конечного) объединения симплексов называется полиэдром. Объединение всех, не более чем $k -$мерных симплексов полиэдра P, называется его

k – мерным остовом и обозначается через $\mathrm{P}^{(k)}$. В частности, нульмерной остов $\mathrm{P}^{(0)}$ полиэдра P совпадается с совокупностью всех его вершин.

Определение [4]. Отображение $p: X \to Y$ назовем локально мягким, если для любого сепарабельного метризуемого пространства B, любого его замкнутого подпространства A и любых двух отображений $\alpha: A \to X$ и $\rho: B \to Y$ таких, что $p_\alpha = p|_A$ найдётся такое отображение $\gamma: U \to X$ определенное на некоторой открытой окрестности U множества A в B, что $\gamma|_A = \alpha$ и $p\gamma = \rho|_u$. т.е. имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ p\ } & Y \\ \alpha\uparrow & \nwarrow^{\gamma} & \uparrow\rho \\ A & \subset U \subset & B \end{array} \quad (8) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ p\ } & Y \\ \alpha\uparrow & \nwarrow^{\gamma} & \uparrow\rho \\ A & \subset & B \end{array} \quad (9)$$

Если в указанных условиях окрестность U всегда можно считать совпадающей со всем пространством B, тогда отображение p будем называть мягким.

Условимся говорить, что пространство (напомним, что, то мы рассматриваем лишь сепарабельные метризуемые пространства) является абсолютным (окрестностным) экстензором, если постоянное отображение этого пространства является (локально) мягким отображением. Класс всех абсолютных (окрестностных) экстензоров обозначается через $A(N)E$.

Из определения 2 функтора $\mathrm{Set}(X)$ и структуры его открытых множеств, а также непрерывности открытых отображений вытекает следующая [5]:

Теорема 1. Пусть $f: X \to Y$ непрерывное открытое отображение между топологическими пространствами X и Y. Тогда отображение $\mathrm{Set}(f): \mathrm{Set}(X) \to \mathrm{Set}(Y)$ тоже открыто.

Заметим, что существенный функтор Id и функторы $\exp$, $\exp^c$, $\exp^{ccon}$ являются ковариантными подфункторами функтора Set на категории Top - топологических пространств и непрерывных отображений в себя. Из определения ковариантного функтора и определения морфизмов $\mathrm{Set}(f)$ на категории Top топологических пространств и непрерывных отображений в себя вытекают следующие.

Теорема 2. а) Функтор Set является ковариантным функтором в категории Top.

б) Функтор $\mathrm{Set}: Top \to Top$ сохраняет слои непрерывного отображения, т.е. $(\mathrm{Set}(f))^{-1}(f(A)) = \mathrm{Set}(f^{-1}(A))$.

Пусть X бесконечное топологическое пространство. Через $\mathrm{Set}_{\chi_0}(X)$ обозначим семейство всех конечных и счетных подмножеств пространства X т.е.

$$\mathrm{Set}_{\chi_0}(X) = \{F : F \subseteq X; |F| \le \chi_0\};$$

$$\exp_n(X) = \{F : F \subseteq X; |F| \le n\};$$

$$\exp_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \exp_n(X);$$

отсюда

$$\exp_\omega(X) \subseteq \mathrm{Set}_{\chi_0}(X),\ \mathrm{Set}_{\chi_0}(X) \subseteq \mathrm{Set}(X).$$

Для всякого отображения $f: X \to Y$ определена послойная экспонента $\overline{f}_f: X \to Y_1$ где $X_f = \{F \in \mathrm{Set}(X) : F \subset f^{-1}(y), y \in Y\}$, так что $\overline{f}(F) = y$, если $F \subset f^{-1}(y)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & {}^{k}\nearrow & \downarrow f \\ \mathrm{Z} & \xrightarrow[n]{} & \mathrm{Y} \end{array} \qquad (10)$$

где Z_0 есть замкнутое подмножество компакта $\mathbb{Z}$.

(*): Задачу о существовании такого продолжения $k: Z \to X$ отображения g, что $f \circ k = h$.

Отображение f называется $n-$мягким, $n = 0,1,2,\ldots$, если задача (*) имеет решение всякий раз, когда $\dim \mathbb{Z} \le n$; $\infty-$мягким отображения называется просто мягким.

Подмножество A (не обязательно замкнутое) пространства X называется $C-$вложенным, если всякая непрерывная функция $f: A \to R$ (соответственно $f: A \to I = [0,1]$) непрерывного продолжается на всех X.

Пространство Y называется стягиваемым (коротко, $Y \in C$), если существует такая гомотопия $H(y,t): Y \times I \to Y$, что $HY_x\{0\} = id_Y$ и $HY_x\{1\}$ - тривиальное локально стягиваемым (коротко, $Y \in LC$), если у всякой точку $y \in Y$ и всякой ее окрестности U существует такая наименьшая окрестность $V \subseteq U$, что выписанное вложение гомотопически тривиально.

Теорема 3. Функтор Set сохраняет стягиваемость и локальную стягиваемость топологических пространств.

Если X вложено в Y, тогда $\mathrm{Set}(X)$ тоже вложено в $\mathrm{Set}(Y)$.

Множества A пространства X называется ретрактом X, если существует непрерывное отображение $r: X \to A$ такая, что для любого $a \in A$ верно $r(a) = a$, т.е. существует непрерывное отображение пространства X на подпространство A оставляющие точки множества A неподвижной.

Предложение [6]. Подпространство A тогда и только тогда является ретрактом пространства X, когда для любого пространства Y каждое отображение $g: A \to Y$ допускает распространение на пространство X.

Если множество A всюду плотно в X, то $\mathrm{Set}(A)$ тоже всюду плотно в X.

Вопрос: Если X есть T_i пространство, то $\mathrm{Set}(X)$ тоже T_i пространство ?

Пусть X топологическое T_1-пространство и $i_X(X) \subset \mathrm{Set}(X)$, $i_X(X)$ $C-$вложено в $\mathrm{Set}(X)$. т.е. $f: i_X(X) \to R$ непрерывно, то $\exists\ \widetilde{f}: \mathrm{Set}(X) \to R$, что $\widetilde{f}\,|_{i_X(X)} = f$.

$O(u_1,u_2,\ldots,u_k) = \{A: A \in \mathrm{Set}(X), A \subset \bigcup_{i=1}^{k} u_i, A \cap u_i \neq \varnothing, i = \overline{1,k}\}$ базисные множества пространства $\mathrm{Set}(X)$. Теперь рассмотрим дополнение базисного множества в прос-транстве $\mathrm{Set}(X)$.т.е. какие множества являются замкнутыми множествами в $\mathrm{Set}(X)$.

С другой стороны:

$$O(u_1,u_2,\ldots,u_k) = \{A: A \in \mathrm{Set}(X), A \subset \bigcup_{i=1}^{k} u_i\} \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \{A: A \in \mathrm{Set}(X), A \cap u_i \neq \varnothing\}) \qquad (11)$$

$$\mathrm{Set}(X) \setminus O(u_1,u_2,\ldots,u_k) = (\mathrm{Set}X \setminus \{A: A \in \mathrm{Set}(X); A \subset \bigcup_{i=1}^{k} u_i\}) \cup$$

$$\cup(\mathrm{Set}X \setminus \bigcap_{i=1}^{k}\{A : A \in \mathrm{Set}X, A \cap u_i \neq \varnothing\}) = \mathrm{Set}X \setminus \{A : A \in \mathrm{Set}X, A \subset \bigcup_{i=1}^{k} u_i\} \cup \quad (12)$$

$$\cup(\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{Set}(X) \setminus \{A : A \in \mathrm{Set}X, A \cap u_i \neq \varnothing\}).$$

Значит, это множество состоит из объединения следующих множеств:

а) $\mathrm{Set}X \setminus \{A : A \in \mathrm{Set}X : A \subset \bigcup_{i=1}^{k} u_i\}$; (13)

б) $\mathrm{Set}X \setminus \{A : A \in \mathrm{Set}X : A \cap u_i \neq \varnothing\}$;

Теперь, если разложить, то получим

$$\mathrm{Set}X \setminus \{A : A \in \mathrm{Set}X, A \subset \bigcup_{i=1}^{k} u_i\} = \{A : A \in \mathrm{Set}X, A \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} u_i = \bigcap_{i=1}^{k}(X \setminus u_i)\} \quad (14)$$

$$\mathrm{Set}X \setminus \{A : A \in \mathrm{Set}X, A \cap u_i \neq \varnothing\} = \{A : A \in \mathrm{Set}X, A \cap u_i \neq \varnothing\} =$$
$$= \{A : A \in \mathrm{Set}X, A \subset X \setminus u_i\}$$

Получается, что если $u_1, u_2, ..., u_k$ открыты, то множества

$$\{A : A \in \mathrm{Set}X, A \subset \bigcup_{i=1}^{k} u_i\} = \mathrm{Set}(\bigcup_{i=1}^{k} u_i, X), \quad (15)$$

$$\{A : A \in \mathrm{Set}X, A \cap u_i \neq \varnothing\} = \mathrm{Set}\, X \setminus \mathrm{Set}(X \setminus u, X)$$

открыты в пространстве непустых подмножеств по определению экспоненциального множества $\mathrm{Set}(X)$.

С другой стороны, такой вид имеет элементы предбазы, указанной нами при определении экспоненциальной топологии:

$$\mathrm{Set}(u, X) = O(u),\ \mathrm{Set}(X) \setminus \mathrm{Set}(X \setminus u, X) = O(u, X).$$

Таким образом, семейства всех множеств вида $O < u_1, u_2, ..., u_k >$, где множества $u_1, u_2, ..., u_k$ открыты в пространстве X, является базой экспоненциальной топологии в пространстве $\mathrm{Set}(X)$.

Заключение. Исследуя множество всех непустых подмножеств $Set(X)$ топологического пространства X, показываем, что топологическое пространство $Set(X)$ обладает богатыми геометрическими свойствами в этой категории. Если $f : X \to Y$ есть непрерывное отображение между топологическими пространствами, строим непрерывное отображение $Set(X) : Set(X) \to Set(Y)$.

1) Для любого топологического пространства X имеется следующая цепочка пространств:

$$\exp^{ccon}(X) \subseteq \exp^{con}(X) \subseteq \exp(X) \subseteq Set(X)$$

$$\exp^{c}(X) \subseteq \exp(X).$$

2) а) Функтор Set является ковариантным функтором в категории Top;

б) Функтор $Set : Top \to Top$ сохраняет слои непрерывного отображения, т.е. $(Set(f))^{-1}(f(A)) = Set(f^{-1}(A))$ (Теорема 2).

3) Функтор Set сохраняет стягиваемость и локальную стягиваемость топологических пространств (теорема 3).

Для топологического пространства X исследуя топологические и геометрические свойства пространства $Set(X)$ попытаемся получить ответ на следующие задачи:

А. Из линейной связности пространства X следует ли линейная связность пространства $Set(X)$?

Б. Если X топологическое многообразие, то пространство $Set(X)$ будет ли топологическим многообразием?

В. Для каких топологических пространств X, топологическое подпространство $Set(X) \setminus X$ гомотопически плотно в $Set(X)$?

Список использованной дитературы:

(1). Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М. 1988, МГУ, 252 с.

(2). Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов. Усп. мат. наук, М., 1981, т.36, №3, с. 3–62.

(3). Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и $Q-$ многообразия. Усп. мат. наук. М., 1981, т. 36, № 3, с. 177–195.

(4). Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии. Усп. мат. наук. М., 1991, т. 46, № 1, с. 41–80.

(5). Жураев Т.Ф. О ковариантных функторах конечной степени сохраняющих $ANR(\mathfrak{M})$ пространства. Докл. ДАН. болг. 1990, т. 43, № 9, с. 5–8.

(6). Федорчук В.В., Чигогидзе А.Ч. Экстензоры и мягкие отображения. М., МГУ, 1987, 58 с.

(7). Богатый С.А., Федорчук В.В. Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия Итоги науки и техники. Алгебра. Топология, Геометрия, М., 1986, ВИНИТИ, т. 24, с. 195–270.

(8). Ташметов У. О связности и локальной связности некоторых гиперпространств. Сиб.мат.журнал. 1974, т. 15, № 5, с. 1115–1130.

(9). Борсук К. Теория ретрактов М., "Мир", 1971, 291 с.

(10). Bessaga C. Pelczynski A. Selected topics in infinite-dimensional topology Warszawa, PWN, 58, 1975, 353 pp.

(11). Umarov D. On one open mopping of hyperspaces, Abst.inter.confer. "Problems of modern topologies and applications", 2013, Tashkent, 20–24 may, c. 94–95.

Отажонова Розика Махсудбек кызы (преподаватель, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; e-mail: rozikaotajonova@gmail.com)

ПОЛУЧЕНИЕ ТВЕРДОГО РАСТВОРА $SI_{1-X}GE_X$ <SN> ИЗ ЖИДКОЙ ФАЗЫ

Аннотация. *Экспериментально исследованы и проанализированы особенности варизонных монокристаллических структур на основе твердого раствора $Si_{1-x}Ge_x$ ($0<x<1$), выращенных на подложках $Si(111)$ из оловянного раствора-расплава методом жидкофазной эпитаксии. Предложен механизм роста подобних структур, объяснена причина большей толщины выращенных пленок на верхних подложках в установке для жидкофазной эпитаксии на основе явления неустойчивости Рэлея-Тейлора.*

Ключевые слова*: эпитаксия, кристаллизация, раствор-расплав, твердый раствор, подложка, нанокластер, структура, неустойчивость Рэлея-Тейлора, броуновское движение, диффузия.*

Otajonova Ro'zika Maqsudbek qizi (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti o'qituvchisi; e-mail: rozikaotajonova@gmail.com)

SUYUQ FAZADAN $SI_{1-x}GE_x$<SN> QATTIQ ERITMASINI OLISH

Annotatsiya. *Suyuq fazali epitaksiya usuli bilan Si(111) taganoklarida o'simtirilgan, qattiq eritma $Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$) asosidagi varizon monokristallik strukturalarning xususiyatlari eksperimental tarzda o'rganildi va tahlil qilindi. Bunday strukturalarning o'sish mexanizmi taklif qilindi hamda suyuq fazali epitaksiya qurilmasida yuqori taganoklarda o'stirilgan qoplamalarning kattaroq qalinlikka ega bo'lish sababi Reyli-Teylor beqarorligi hodisasi asosida tushuntirildi.*

Kalit so'zlar: *epitaksiya, kristallanish, eritma-qotishma, qattiq eritma, taganok, nanoklaster, struktura, Reyli-Teylor beqarorligi, Braun harakati, diffuziya.*

Otajonova Ruzika Maqsudbek qizi (Teacher Urgench State University named after Abu Raykhan Beruni; e-mail: rozikaotajonova@gmail.com)

OBTAINING THE SOLID SOLUTION $SI_{1-x}GE_x$<SN> FROM THE LIQUID PHASE