$$\hat{a}_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}; \hat{a}_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}; \hat{a}_2 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}; \hat{a}_3 = \frac{\Delta_{a_3}}{\Delta}; ...; \hat{a}_n = \frac{\Delta_{a_n}}{\Delta} \quad (9)$$

(20) formulalarda aynan biz izlayotgan noma'lum $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ va a_n parametrlarning $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_{n-1}$ va $\hat{a}_n$ baholari keltirilgandir. Demak, izlanayotgan kvadratik regressiya tenglamasi $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2 + \hat{a}_3 x^3 + ... + \hat{a}_n x^n$ ko'rinshda ekan. Shuni eslatib o'tamizki, bu bog'liqlik X va Y lar orasidagi emas, balki X va Y lar orasidagi kvadratik bog'liqlikdir. Demak, Y va $\hat{Y}$ belgilar orasida ma'-lum farq (xatolik) mavjuddir. Y aynan U orqali ifodalangan edi [10].

Xulosa. Mazkur tadqiqotda regressiya tenglamalarida noma'lum parametrlarni baholashning nazariy va amaliy jihatlari o'rganildi. O'zgaruvchilar orasidagi statistik bog'liqlikni ifodalashda chiziqli, kvadratik hamda umumiy n-tartibli regressiya modellarini qurish usullari ko'rib chiqildi. Model parametrlarini aniqlashda eng kichik kvadratlar usulining samarali ekanligi va bu usul yordamida mos normal tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkinligi ko'rsatildi. Kuzatuv ma'lumotlari asosida qurilgan regressiya tenglamalarining adekvatligi Fisher mezoni yordamida tekshirilib, olingan natijalar modellarning amaliy jihatdan qo'llashga yaroqli ekanini tasdiqladi. Shuningdek, regressiya tahlili turli jarayonlar orasidagi bog'liqliklarni matematik modellashtirish, tahlil qilish va prognozlashda muhim vosita ekanligi asoslandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

[1]. Introduction to Mathematical Statistics. Hogg R., McKean J., Craig A. Pearson Education, 2013.

[2]. Applied Regression Analysis. Draper N., Smith H. Wiley, 1998.

[3]. Introduction to Linear Regression Analysis. Montgomery D., Peck E., Vining G. Wiley, 2012.

[4]. Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. Walpole R., Myers R., Myers S., Ye K. Pearson, 2012.

[5]. The Elements of Statistical Learning. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. Springer, 2009.

[6]. An Introduction to Statistical Learning. James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R. Springer, 2013.

[7]. Regression Analysis by Example. Chatterjee S., Hadi A. Wiley, 2006.

[8]. Mathematical Statistics and Data Analysis. Rice J. Cengage Learning, 2006.

[9]. Mathematical Statistics with Applications. Wackerly D., Mendenhall W., Scheaffer R. Cengage Learning, 2008.

[10]. Statistical Methods. Snedecor G., Cochran W. Iowa State University Press, 1989.

Xolmatova Shahrizoda (Axborot texnologiyalari va menejment universiteti 1-kurs magistratura Matematika mutaxassisligi magistranti)

SHARTSIZ OPTIMALLASHTIRISH USULLARINI TAQQOSLASH

Annotatsiya. *Mazkur maqolada shartsiz optimallashtirish usullari nazariy va amaliy jihatdan taqqoslanadi. Gradient, Nyuton, kvazi-Nyuton (BFGS, L-BFGS) hamda konjugat gradient algoritmlarining yaqinlashuv tezligi, hisoblash murakkabligi va barqarorlik xossalari tahlil qilinadi. Tadqiqot jarayonida turli tipdagi test funksiyalari asosida empirik sinovlar o'tkazilib, algoritmlarning real samaradorligi baholanadi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, usul tanlovi funksiyaning tuzilishi va o'lchamiga bog'liq bo'lib, kvazi-Nyuton algoritmlari tezlik va resurs tejamkorligi o'rtasida optimal muvozanatni ta'minlaydi.*

Kalit so'zlar*: shartsiz optimallashtirish, gradient usuli, Nyuton usuli, BFGS, L-BFGS, konjugat gradient, yaqinlashuv tezligi, hisoblash murakkabligi.*

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. *В статье проводится сравнительный анализ методов безусловной оптимизации с теоретической и практической точек зрения. Рассматриваются градиентный метод, метод Ньютона, квазиньютоновские алгоритмы (BFGS, L-BFGS) и метод сопряжённых градиентов. Исследуется скорость сходимости, вычислительная сложность и устойчивость алгоритмов. На основе тестовых функций различного типа проведены численные эксперименты, позволившие оценить эффективность методов в задачах различной размерности.*

Ключевые слова*: безусловная оптимизация, градиентный метод, метод Ньютона, BFGS, L-BFGS, вычислительная сложность.*

COMPARISON OF UNCONSTRACTED OPTIMIZATION METHODS

Annotation. *This paper presents a comparative analysis of unconstrained optimization methods from both theoretical and practical perspectives. The gradient method, Newton's method, quasi-Newton*

algorithms (BFGS, L-BFGS), and the conjugate gradient method are examined. Their convergence rate, computational complexity, and stability properties are analyzed. Numerical experiments based on benchmark test functions of different types and dimensions are conducted to evaluate practical performance. The results indicate that the choice of an optimization algorithm depends on the structure of the objective function and the problem dimension. Quasi-Newton methods demonstrate an effective balance between convergence speed and computational efficiency.

***Keywords**: unconstrained optimization, gradient method, Newton's method, BFGS, L-BFGS, conjugate gradient, convergence rate, computational complexity.*

Kirish. Optimallashtirish bugungi ilm-fan va texnologiyaning yuragi hisoblanadi. Deyarli har bir zamonaviy hisoblash masalasi – mashinaviy o'rganish modeli parametrlarini aniqlashdan tortib muhandislik konstruktsiyalarini loyihalashgacha – ma'lum bir funksiyaning eng kichik yoki eng katta qiymatini topishga keltiriladi. Agar masalada qo'shimcha cheklovlar bo'lmasa, u shartsiz optimallashtirish masalasi deb ataladi. Bir qarashda, oddiy ko'ringan bu masala amalda murakkab matematik va hisoblash jarayonlarini talab qiladi.

Shartsiz optimallashtirishning asosiy muammosi shundaki, maqsad funksiyasi, ko'pincha, ko'p o'zgaruvchili, nolinear va murakkab tuzilishga ega bo'ladi. Parametrlar soni ortgan sari minimum nuqtani aniqlash yanada qiyinlashadi. Ba'zi hollarda funksiya silliq va konveks bo'ladi, boshqa hollarda esa ko'plab lokal minimumlarga ega bo'lib, global minimumni topish muammoli tus oladi. Shu sababli turli vaziyatlarga mos keluvchi samarali algoritmlarni ishlab chiqish va ularni solishtirish optimallashtirish nazariyasining markaziy vazifasiga aylangan.

Hozirgi kunda shartsiz optimallashtirish uchun birinchi tartibli gradient usullari, ikkinchi tartibli Nyuton usuli, kvazi-Nyuton algoritmlari hamda konjugat gradient metodlari keng qo'llanilmoqda. Har bir usulning o'ziga xos kuchli va zaif tomonlari mavjud: biri sodda va hisoblash jihatdan yengil bo'lsa, boshqasi tez yaqinlashadi, lekin ko'proq resurs talab qiladi.

Metodologiya va adabiyotlar tahlili. Shartsiz optimallashtirish usullarini taqqoslashda metodologiyani aniq va izchil qurish muhim ahamiyatga ega. Tadqiqotning nazariy asosi sifatida ko'p o'zgaruvchili funksiyaning minimumini topish masalasi qabul qilindi. Bunda funksiya uzluksiz differensiallanuvchi deb qaraladi va algoritmlar uning gradienti hamda ikkinchi tartibli hosilalari asosida ishlaydi [1]. Taqqoslash jarayonida usullar bir xil boshlang'ich sharoitda, bir xil to'xtash mezonlari va parametr sozlamalari asosida sinovdan o'tkazildi. Bu yondashuv algoritmlar samaradorligini xolis baholash imkonini beradi.

Avvalo, Jorge Nocedal va Stephen J. Wright tomonidan yozilgan "Numerical Optimization" (2006) asari zamonaviy optimallashtirish nazariyasining asosiy manbalaridan biri hisoblanadi. Ushbu kitobda gradient usullari, Nyuton metodi, kvazi-Nyuton algoritmlari (xususan, BFGS va L-BFGS) hamda ularning konvergensiya xossalari chuqur matematik asosda yoritilgan [2]. Mualliflar qadam uzunligini tanlash strategiyalari, Wolfe shartlari va global konvergensiya masalalarini tizimli ravishda bayon qilgan. Tadqiqot metodologiyasini qurishda aynan shu asar asosiy nazariy tayanch vazifasini bajaradi.

Konveks optimallashtirish masalalari bo'yicha Stephen Boyd va Lieven Vandenberghe tomonidan yozilgan "Convex Optimization" (2004) asari alohida ahamiyatga ega. Ushbu manbada konveks funksiyalar uchun gradient va Nyuton usullarining nazariy kafolatlari, optimal shartlar va dual yondashuvlar batafsil tahlil qilingan. Ayniqsa, konditsionallik va yaqinlashuv tezligining funksiyaning xossalarigaa bog'liqligi chuqur tushuntirilgan [3].

Kvazi-Nyuton metodlarining amaliy jihatlari R.Fletcherning "Practical Methods of Optimization" (1987) asarida batafsil yoritilgan. Fletcher BFGS algoritmining yangilanish formulasi va uning superchiziqli yaqinlashuv xossalarini tushuntiradi [4]. Kitob optimallashtirish algoritmlarini real hisoblash masalalarida qo'llashga qaratilganligi bilan ajralib turadi.

Konjugat gradient usuli bo'yicha klassik manba M.R.Hestenes va E.Stiefelning "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems" (1952) maqolasidir. Ushbu ish kvadratik funksiyalar uchun konjugat gradient algoritmining asoslarini ishlab chiqdi va katta o'lchamli chiziqli tizimlarni samarali yechish imkonini ko'rsatdi.

Shartsiz optimallashtirish usullarini o'rganishda mahalliy ilmiy adabiyotlar ham muhim metodologik asos vazifasini bajaradi. O'zbekiston oliy ta'lim muassasalarida chop etilgan darslik va o'quv qo'llanmalarda optimallashtirish nazariyasining fundamental tushunchalari, gradient usullari va sonli metodlar tizimli bayon etilgan.

A.Abdullayev va O.Xudoyberdiyevning "Oliy matematika" darsligida ko'p o'zgaruvchili funksiyalar differensial hisobining asoslari, gradient tushunchasi va ekstremum shartlari batafsil ko'rib chiqilgan.

Mazkur manba shartsiz optimallashtirishning matematik asoslarini shakllantirishda muhim nazariy tayanch bo‘lib xizmat qiladi [5]. Shuningdek, A.I.Ismoilovning “Sonli usullar” (Toshkent, “Fan va texnologiya”) asarida iteratsion jarayonlar, yaqinlashuv tushunchasi va xatoliklarni baholash metodlari keng yoritilgan. Muallif gradient usulining hisoblash jihatlarini va uning yaqinlashuv tezligini tahlil qilib, amaliy misollar asosida tushuntiradi. Ushbu manba optimallashtirish algoritmlarining sonli tahlilini asoslashda qo‘llanildi [6].

U.Sh.Rahimovning “Amaliy matematika usullari” kitobida ko‘p o‘lchamli funksiyalarni minimallashtirish masalalari va Nyuton tipidagi iteratsion metodlar bayon qilingan. Ayniqsa, ikkinchi tartibli hosilalarning roli va Gessian matritsa orqali tez yaqinlashuv masalalari yoritilgan bo‘lib, bu Nyuton usulining nazariy asoslarini tushuntirishda muhim manba hisoblanadi.

S.K.Karimovning “Matematik modellashtirish asoslari” kitobida optimallashtirishning amaliy masalalardagi qo‘llanilishi, parametrlarni tanlash va modellarni kalibrlash usullari tahlil qilingan [7]. Muallif optimallashtirish algoritmlarini iqtisodiy va texnik modellashtirish bilan bog‘lab ko‘rsatadi.

Yuqoridagi mahalliy adabiyotlar shartsiz optimallashtirishning matematik asoslari, sonli usullari va amaliy qo‘llanilish yo‘nalishlarini tizimli yoritadi.

Natijalar va muhokama. Tadqiqot davomida shartsiz optimallashtirishning to‘rtta asosiy algoritmi – gradient usuli, Nyuton usuli, kvazi-Nyuton (BFGS) va konjugat gradient – bir xil test sharoitlarida sinovdan o‘tkazildi. Maqsad faqat qaysi algoritm tezroq ishlashini aniqlash emas, balki ularning matematik xulq-atvori, yaqinlashuv xarakteri va hisoblash resurslariga munosabatini chuqurroq tushunish edi.

Shartsiz optimallashtirishning umumiy ko‘rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Bu yerda f(x) ko‘p o‘zgaruvchili, uzluksiz differensiallanuvchi maqsad funksiyasi. Minimum nuqta uchun zarur shart:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

bo‘lib, ya’ni minimumda gradient nolga teng bo‘ladi. Tadqiqotda aynan gradient normasi kichiklashuvi algoritm samaradorligini baholash mezoni sifatida qabul qilindi [8].

Gradient usuli iterativ ravishda funksiyaning eng tez kamayish yo‘nalishi bo‘yicha harakat qiladi:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Natijalar shuni ko‘rsatdiki, gradient usuli barqaror ishlaydi va kichik o‘lchamli, yaxshi konditsionallikka ega funksiyalar uchun yetarli darajada samarali. Biroq tor vodiyli yoki yomon konditsionallikka ega funksiyalarda iteratsiyalar soni keskin ortadi. Amalda bu shuni anglatadiki, gradient har doim “to‘g‘ri tomonga” qaragan bo‘lsa ham, minimumga yetib borish uchun ko‘p mayda qadamlar talab qilinadi [9].

Bu hodisa ayniqsa Rosenbrock funksiyasida yaqqol kuzatildi: algoritm vodiy ichida “zig-zag” harakat qilib, sekin yaqinlashdi. Shunday bo‘lsa-da, hisoblash jihatdan oddiyligi sababli gradient usuli katta o‘lchamli masalalarda ham qo‘llashga yaroqli bo‘lib qoldi.

Nyuton usuli gradientdan tashqari Gessian matritsadan ham foydalanadi. Bu lokal kvadratik yaqinlashuvni ta’minlaydi. Tajribalarda boshlang‘ich nuqta minimumga yaqin bo‘lganda 8–12 iteratsiyada yuqori aniqlikka erishildi. Bu juda tez natija hisoblanadi.

Ammo Gessian matritsani hisoblash va uni teskari qilish katta o‘lchamli masalalarda jiddiy hisoblash yukini keltirib chiqardi. O‘lcham ortgan sari vaqt sarfi keskin oshdi. Natijada kichik o‘lchamli, silliq funksiyalar uchun Nyuton usuli eng samarali, ammo katta o‘lchamli muammolar uchun amaliy jihatdan qimmatga tushuvchi metod sifatida namoyon bo‘ldi [10].

BFGS algoritmi Gessianni bevosita hisoblamasdan, uni iterativ ravishda yaqinlashtiradi. Amaliy natijalar shuni ko‘rsatdiki, BFGS Nyuton usuliga yaqin tezlikda yaqinlashdi, lekin hisoblash xarajatlari sezilarli darajada kam bo‘ldi.

O‘rta o‘lchamli masalalarda aynan BFGS optimal muvozanatni ta’minladi: tez yaqinlashuv, barqarorlik va nisbatan past hisoblash sarfi. L-BFGS varianti esa katta o‘lchamli vazifalarda xotira tejamkorligi bilan ajralib turdi [11].

Kvadratik funksiyalar uchun konjugat gradient usuli o‘zining ustunligini ko‘rsatdi. U xotira jihatdan tejamkor va katta o‘lchamli tizimlarda samarali bo‘ldi. Biroq umumiy nolinear funksiyalar uchun uning samaradorligi BFGS bilan solishtirganda pastroq natija berdi.

Xulosa. Maqolada shartsiz optimallashtirish usullari nazariy asoslari va amaliy samaradorligi nuqtai nazaridan tizimli ravishda taqqoslandi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, algoritm tanlash masalaning tuzilishi, o‘lchami va funksiyaning silliqlik darajasiga bevosita bog‘liq. Gradient usuli hisoblash jihatdan sodda va barqaror bo‘lsa-da, yomon konditsionallikka ega funksiyalarda sekin yaqinlashadi. Nyuton usuli esa lokal kvadratik tezlikda yaqinlashib, kichik o‘lchamli masalalarda yuqori samaradorlik ko‘rsatadi, biroq hisoblash xarajati katta bo‘ladi.

Kvazi-Nyuton algoritmlari, xususan BFGS va uning cheklangan xotirali varianti L-BFGS, tezlik va resurs tejamkorligi o‘rtasida muvozanatni ta’minlashi bilan ajralib turadi. Katta o‘lchamli kvadratik masalalarda konjugat gradient usuli samarali natija berdi.

Tadqiqot shuni tasdiqlaydiki, universal eng yaxshi usul mavjud emas; optimal tanlov muammoning xususiyatlariga mos ravishda amalga oshirilishi lozim. Shu bilan birga, nazariy konvergensiya xossalari amaliy tajribalarda ham o‘z tasdig‘ini topdi. Kelgusida adaptiv va gibrid optimallashtirish algoritmlarini ishlab chiqish istiqbolli ilmiy yo‘nalish hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Abduqodirov A.A. Oliy matematika. Toshkent, O‘zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2019, 187-bet.

(2). Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. New York, “Springer”, 2006, 664 p.

(3). Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge, Cambridge University Press, 2004, 716 p.

(4). Bertsekas D.P. Nonlinear Programming. Belmont, Athena Scientific, 1999, 777 p.

(5). Rahimov U.Sh. Amaliy matematika usullari. Toshkent, “Fan”, 2017, 256-bet.

(6). To‘xtayev B.T. Chiziqli algebra va analitik geometriya. Toshkent, “O‘qituvchi”, 2016, 320-bet.

(7). Karimov S.K. Matematik modellashtirish asoslari. Toshkent, “Innovatsiya-Ziyo”, 2020, 240-bet.

(8). Abdullayev A., Xudoyberdiyev O. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, O‘zMU nashriyoti, 2019, 356-bet.

(9). Saidov N.R. Hisoblash matematikasi. Toshken, “Fan”, 2015, 228-bet.

(10). Qodirov R. Sonli hisoblash metodlari. Toshkent, “O‘qituvchi”, 2014, 192-bet.

(12). Yusupov M. Matematik analiz (ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar). Toshkent, “Fan va texnologiya”, 2018, 304- bet.

Suyunova Madina (Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti 2-kurs talabasi; e-mail: madinasuyunova7476@gmail.com)

“MATEMATIKA” FANIDAN OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA YORDAMCHI FUNKSIYA KIRITISH METODI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada ko‘plab matematik olimpiadalarida uchraydigan hosilaga oid tenglamalarni yechimi mavjud ekanini isbotlashda qo‘llaniladigan yordamchi funksiya kiritish metodi ko‘rib chiqilgan. Yechimga oson olib boradigan yordamchi funksiyani qanday topish tushuntirilgan.*

Kalit so‘zlar*: Roll teoremasi, Balsona Koshi teoremasi, yordamchi funksiya, differensiallanuvchi funksiya, hosila.*

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ОЛИМПИАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. *В данной статье рассматривается метод введения вспомогательной функции для доказательства существования решений уравнений с производной, которые часто встречаются на математических олимпиадах. Объясняется, как правильно построить вспомогательную функцию, естественным образом приводящую к решению. Также обсуждаются основные принципы выбора такой функции и показывается, как данный метод упрощает процесс решения.*

Ключевые слова: *теорема Ролля, теорема Больцано–Коши, вспомогательная функция, дифференцируемая функция, производная.*

APPLICATION OF THE AUXILIARY FUNCTION METHOD TO MATHEMATICAL OLYMPIAD PROBLEMS

Annotation. *This article examines the method of introducing an auxiliary function to prove the existence of solutions to derivative-based equations that frequently appear in mathematical Olympiads. It explains how to construct an appropriate auxiliary function that leads naturally and efficiently to the*