Джураев Шухрат Исроилович (Бухарский государственный Педагогический институт; sjurayev509@gmail.com),
Отажонова Ситорабону Шухратовна (Бухарский государственный Технический университет; sitorabonuotajonova@gmail.com)

СВОБОДНЫЕ ВОЛЫ В ВЯЗКОУПРУГОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Аннотация. *Целью работы является разработка методики и алгоритма, анализ характеристик нормальных затухающих волн в области низких и высоких частот, изучение особенностей формирования поверхностных волн, анализ кинематических характеристик этих волн в широком диапазоне частот (волновых чисел). Динамическое поведение цилиндра описывается интегро-дифференциальными уравнениями механики деформируемых тел. После применения метода замораживания Филатова, получаются дифференциальные уравнении с комплексными коэффициентами. Спектральная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений выражаются цилиндрическими функциями Бесселя и Ханкеля. Частотные уравнения решаются численно методами Мюллера и Гаусса. Исследовано изменение собственной частоты и фазовой скорости в зависимости от волнового числа. Найдено, что объемных сейсмических волн претерпевают малую дисперсию. Однако дисперсия значительна для поверхностных волн и некоторых других явлений. Учет реологических свойств материала сопровождается дисперсиями волн. Механизмы, посредством которых энергия упругих волн преобразуется в тепло, не совсем ясны. Предложены различные механизмы потерь, но не один из них не отвечает полностью всем требованиям. Этот процесс исследуется в настоящей работе. Обнаружена, что для пологого цилиндра существуют два вида низких фазовых скоростей, которыее соответствуют поверхностным волнам.*

Ключевые слова: *собственные волны, полое цилиндрическое тело, напряжение, спектральная задача, собственная частота, фазовая скорость.*

VISKOELASTIK BO‘SHLI SILINDRDAGI ERIQ SUV

Annotatsiya. *Ushbu maqolada past va yuqori chastotalar sohasida normal so‘nuvchi to‘lqinlarning xususiyatlarini tahlil qilish, sirt to‘lqinlarining shakllanish xususiyatlarini o‘rganish, ushbu to‘lqinlarning keng chastota diapazonida (to‘lqin sonlarida) 42pectral42 xususiyatlarini tahlil qilish usul va algoritmini ishlab chiqishdan iborat. Silindrning dinamik holati deformatsiyalanuvchi jismlar mexanikasining integro-differensial tenglamalari bilan ifodalanadi. Filatovning muzlatish usuli qo‘llanilgandan so‘ng kompleks koeffitsiyentli differensial tenglamalar olinadi. Spektral masala birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Oddiy differensial tenglamalar sistemasining yechimi Bessel va Xankel silindrik funksiyalari bilan ifodalanadi. Chastotaviy tenglamalar Myuller va Gauss usullari bilan sonli yechiladi. Xususiy chastota va fazaviy tezlikning to‘lqin soniga bog‘liq ravishda o‘zgarishi o‘rganildi. Hajmiy seysmik to‘lqinlar kichik dispersiyaga uchrashi aniqlandi. Biroq sirt to‘lqinlari va boshqa ba’zi hodisalar uchun dispersiya katta ahamiyatga ega. Materialning reologik xususiyatlarini hisobga olish to‘lqinlar dispersiyasi bilan birga keladi. Elastik to‘lqinlar energiyasining issiqlikka aylanish mexanizmlari aniq emas. Yo‘qotishlarning turli mexanizmlari taklif etilgan, ammo ularning birortasi ham barcha talablarga to‘liq javob bermaydi. Bu jarayon ushbu ishda o‘rganiladi. Qavariq silindr uchun sirt to‘lqinlariga mos keladigan ikki xil past fazaviy tezliklar mavjudligi aniqlandi.*

Kalit so‘zlar: *xususiy to‘lqinlar, kovak silindrik jism, kuchlanish, pectral masala, xususiy chastota, fazaviy tezlik.*

FREE WATER IN A VISCOELASTIC HOLLOW CYLINDER

Annotation. *The aim of the work is to develop a method and algorithm, analyze the characteristics of normal damped waves in the region of low and high frequencies, study the peculiarities of surface wave formation, analyze the kinematic characteristics of these waves in a wide range of frequencies (wave numbers). The dynamic behavior of the cylinder is described by the integro-differential equations of the mechanics of deformable bodies. After applying the Filatov freezing method, differential equations with complex coefficients are obtained. The spectral problem is reduced to the solution of a system of ordinary differential equations of the first order. The solution of the system of ordinary differential equations is expressed by cylindrical Bessel and Hankel functions. The frequency equations are solved numerically by Muller and Gauss methods. The variation of natural frequency and phase velocity as a function of wave number is investigated. It is found that bulk seismic waves undergo small dispersion. However, the dispersion is significant for surface waves and some other phenomena. Consideration of the rheological*

properties of the material is accompanied by wave dispersions. The mechanisms by which elastic wave energy is converted into heat are not entirely clear. Various loss mechanisms have been proposed, but not one of them fully meets all the requirements. This process is investigated in the present work. It is found that for a hollow cylinder there are two kinds of low phase velocities that correspond to surface waves.

Keywords: *Natural waves, hollow cylindrical body, stress, spectral problem, natural frequency, phase velocity.*

1. Введение. Распространение деформируемых волн в длинных телах различной конфигурации исследовано в работах [1–3]. В этих работах в основном рассматривается распространение упругих волн в волноводах плоского (или цилиндрического) поперечного сечения. В этих работах приведены результаты, полученные Похгаммером. В 1876 г. были получены трансцендентные уравнения, описывающие фазовые скорости от волнового числа (или дисперсионное уравнение). Распространение упругих волн в стержне кругового сечения рассмотрена в работах Кри. В работах Дж.В.Стретта (в 1885 г.) рассмотрено распространение волн в упругом полупространстве, названная впоследствии его именем.

Дисперсионные характеристики характеризуют волновое движение в протяженных телах, которые описывают распространение свободных волн при любом значении частоты (имеющих нулевые частоты запирания) [4,5].

Поскольку фазовые скорости распространения волн в слое близки к скорости волны Рэлея, но всегда различны, то в общем случае напряженно-деформированное состояния в слое формируются от поверхностной волна. [6,7]. Максимальные амплитуды напряжений и перемещений возникают на поверхности слоя или полупространстве [8,9] и в процесс деформации происходит обмен энергией между поверхностями. Дисперсионное уравнение сплошного упругого цилиндра имеет (существует) только один корень и то с нулевой частотой запирания [10,11]. Рэлеевские волны не затухают, т.е., не происходит потеря энергии. Поэтому рэлеевские волны являются бездисперсионными (их фазовая скорость вдоль поверхности не зависит от частоты) и в котором упругая среда однородная и изотропная. Рэлеевские волны являются незатухающими, бездисперсионными (их фазовая скорость вдоль поверхности не зависит от частоты) и существуют во всем диапазоне частот, в котором упругую среду, заполняющую полупространство, можно считать однородной и изотропной [12]. Дисперсионное уравнение и свойства их корней, описывающие нормальных волн в сплошном цилиндре и полом цилиндре существенно отличаются. В работах [13,14] приведен качественный анализ дисперсионных соотношений.

Дисперсионные характеристики упругих волн в полом цилиндре со свободными поверхностями зависят от физико-механических свойств материала, радиуса кривизны и толщины стенки цилиндра. Влияние этих параметров на поведение собственных волн в полом цилиндре рассмотрено в работах [15–17]. Исследование дисперсионных соотношений для цилиндрических волноводов основано на специальных функциях.

2. Методы. Рассматривается распространение свободных (или собственных) волн в вязкоупругом однородном и изотропном полом цилиндре, внутренним и внешним радиусом соответственно a и R.

Линейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие распространение волн в полом цилиндре, в векторной форме, принимают вид

$$\tilde{\mu}\nabla^2\vec{u} + \left(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}\right) grad\, di\vartheta\, \vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где

$$\tilde{\lambda} f(t) = \lambda_0\left[f(t) - \int_0^t R_\lambda(t-\tau)f(\tau)d\tau\right], \quad \tilde{\mu} f(t) = \mu_0\left[f(t) - \int_0^t R_\mu(t-\tau)f(\tau)d\tau\right], \tag{2}$$

$f(t)$ – произвольная функция времени; $R_\lambda(t-\tau)$ и $R_\mu(t-\tau)$ – ядра релаксации; λ_0,μ_0 – мгновенные модули упругости; u – вектор перемещений; ρ – плотность среды; κ– порядковой номер слоев; ν_κ – коэффициент Пуассона, который считаем не релаксирующей величиной [6].

Принимаем интегральные члены в (2) малыми. Тогда функцию $f(t)$ можно представить в виде $f(t) = \psi(t)e^{-i\omega_R t}$, где $\psi(t)$ – медленно меняющаяся функция времени; ω_R – действительная константа. На свободной поверхности полого цилиндра ставится следующие условия:

$$r = a, R : \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0. \quad (3)$$

Для аналитического решения поставленной задачи применяется процедура замораживания [7], тогда соотношения (2) заменяется приближенными выражениями

$$\overline{\lambda} f(t) = \lambda_0 \left[1 - \Gamma_\lambda^C(\omega_R) - i\Gamma_\lambda^S(\omega_R)\right] f(t),$$

$$\overline{\mu} f(t) = \mu_0 \left[1 - \Gamma_\mu^C(\omega_R) - i\Gamma_\mu^S(\omega_R)\right] f(t),$$

$$\Gamma_\lambda^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_\lambda(\tau)\cos\omega_R\tau\, d\tau, \Gamma_\mu^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_\mu(\tau)\cos\omega_R\tau\, d\tau,$$

$$\Gamma_\lambda^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_\lambda(\tau)\sin\omega_R\tau\, d\tau, \quad \Gamma_\mu^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_\mu(\tau)\sin\omega_R\tau\, d\tau -$$

соответственно, косинус- и синус образы Фурье ядра релаксации материала. Для получения численных результатов в качестве ядра вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро релаксации

$$R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}.$$

В осесимметричной деформации полого вязкоупругого цилиндра вектор смещений $\vec{u}\{u_r, u_z\}$ представится в виде [15]:

$$\vec{u} = \vec{U}(r)\exp\left[i\alpha(z - ct)\right], \quad (4)$$

где

$$\vec{U}(r) = U_r(r)\vec{i} + U_z(r)\vec{j},$$

$$U_r(r) = (1/\alpha)Q_1(p_1 r) + (\alpha / p_2^2)Q_2(p_2 r),$$

$$U_z(r) = i(Q_0(p_1 r) + Q_0(p_2 r)),$$

$$p_1^2 = \alpha^2 - \gamma_{RI1}^2; \gamma_{RI1} = \frac{\omega_R R}{V_{0D}} + i\frac{\omega_I R}{V_{0D}},$$

$$p_2^2 = \alpha^2 - \gamma_{RI2}^2; \gamma_{RI2} = \frac{\omega_R R}{V_{0s}} + i\frac{\omega_I R}{V_{0s}}, k = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

Здесь α –волновое число; ω–круговая частота; V_{0D}, V_{0s} – скорости волн продольных и поперечных волн соответственно, ν – коэффициент Пуассона материала полого вязкоупругого цилиндра; R – внешний радиус пологого цилиндра. Распространение возмущений в полом цилиндре удовлетворяют уравнениям движения Ламе. Решение дифференциальных уравнений удовлетворяет специальным функциям Бесселя и Ханкеля. В этом случае радиальные функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{dQ_0(p_k r)}{dr} = Q_1(p_k r), Q_0(p_k r) = A_k L_0(p_k r) + M_k L_0(p_k r), (k = 1, 2), \quad (5)$$

где A_i, B_i – произвольные интегральные постоянные, а функции $L_0(p_к r)$, $M_0(p_к r)$ принимают следующий вид

$$L_0(pr) = \{I_0(pr), pr > 0; I_0(pr), pr > 0,$$

$$M_0(pr) = \{K_0(pr), pr > 0; Y_0(pr), pr > 0. \quad (6)$$

Задача решается в безразмерных переменных. При исследовании процессов распространения затухающих волн в упругих слоисто-однородных средах с плоскопараллельными границами раздела в первую очередь необходимо опреде-лить дисперсионные характеристики этих волн. Условия существования нетривиального решения приводит к дисперсионному уравнению, которое определяет фазовую скорость нормальных волн как трансцендентную функцию комплексной частоты и параметров модели цилиндра. Под диспер-сионными характеристиками понимаются фазовые и групповые скорости $C_ф$ и $V_{гр}$, коэффициенты затухания со временем Ω_I. Известно, что величины $V_ф$ и Ω_I связаны со значением корня диспер-сионного уравнения

$$\Delta(\omega,\xi)=0, \tag{7}$$

формулами $C_ф$ =Imω(ξ), Ω_l=-Reω(ξ), где ω-комплексная частота, ξ-волновое число. Фазовая и групповая скорость связаны со значением корня дисперсионного уравнения некоторыми сложными зависимостями. Таким образом, чтобы иметь возможность вычислять дисперсионные характеристики, необходимо произвести качественное исследование корней уравнения (6) в точках комплексной плоскости, а также разработать метод их численного определения. Более целесообразным является прямое определение комплексных корней методам Мюллера. Рассмотрим сначала низкочастотные колебания, для этого перейдем в уравнении (7) к пределам при $\overline{kr}_1 \to 0, \overline{mr}_1 \to 0$ и при $R_{\lambda k}=0, R_{\mu k}=0$. Получается биквадратное уравнение [2]. В результате получится спектр волны L, который начинается с нулевой частоты. Фазовая скорость c_L волны L не зависит от скорости продольных волн c_{p1} в среде. Но фазовая скорость c_L волны L зависит от плотности ρ_1, скорости c_{s1} и реологических свойств материалов деформируемых сред

$$c_L=\frac{c_{s1}\Gamma_s^{\cdot}}{\sqrt{\left[\rho_{01}+c_{s0}^2\Gamma_s^{\cdot}\right]}}, \tag{8}$$

где $\rho_{01}=\rho_0/\rho_1, c_{s0}=c_s/c_0$, ρ_0 - плотность жидкости, c_0-скорость звука в жидкости. Волна L испытывает экспоненциальное затухание, если скорость ее c_L оказывается выше скорости c_{s1}. При $\omega=\omega_R+i\omega_I=0$ волна L становится затухающей, и выполняется условия $c_{s1}<c_0\sqrt{1-\rho_{01}}$. Если учитываются реологические свойства материалов, тогда $c_{s1}<c_0\sqrt{1-\rho_{01}}/\Gamma_s^{\cdot}$. Самой простой моделью, в которой существуют волна Т, является труба, находящаяся в пустоте. Спектр этой волны начинается с нулевой частоты, при которой фазовая скорость c_L не зависит от толщины стенок, и равна скорости стержневой волны

$$c_T^2=\left[\frac{3-4\gamma_1^2}{1-\gamma_1^2}\right]c_{s1}^2\Gamma_s^{\cdot}, \quad \gamma_1=c_{s1}/c_{p1}<1. \tag{9}$$

Для существования Т волны параметр γ_1 должен принадлежать в интервале $\gamma_1 \in (3/4;1)$. В общем случае дисперсия гидр волн (для упругих или вязкоупругих механических систем) может быть нормальной или аномальной [1]. Соответствующая групповая скорость определяется по формуле [1]

$$C_T=\frac{c_T^2}{c_T-\omega\dfrac{\partial c_T}{\partial\omega}}. \tag{10}$$

Дисперсионные зависимости в поставленной задаче получаются в аналитическом виде, как дисперсионное уравнение, приведённое в работе [16]. Решение дисперсионного уравнения получается только численным методом или применяются методы качественного анализа. Для полого цилиндра у дисперсионного уравнения упругого цилиндра существуют две действительные корни, которые обладают дисперсией в общем случае. При некоторых соотношениях параметров могут существовать скорости волн Рэлея, которые не обладают дисперсией. Учет вязкоупругих свойств материалов усложняет поставленной задачи. Корни дисперсионного уравнения станут комплексными. Свободные волны, в этом случае, задыхаются по времени. Точное решение поставленной задачи, сформулированной на основе дифференциальных уравнений динамической теории вязко – упругости, позволяет исследовать дисперсионные зависимости нормальных затухающих волн численно или методом качественного анализа. Параметры ядра релаксации принято в виде $A=0,048;\ \beta=0,05;\ \alpha=0,1..$

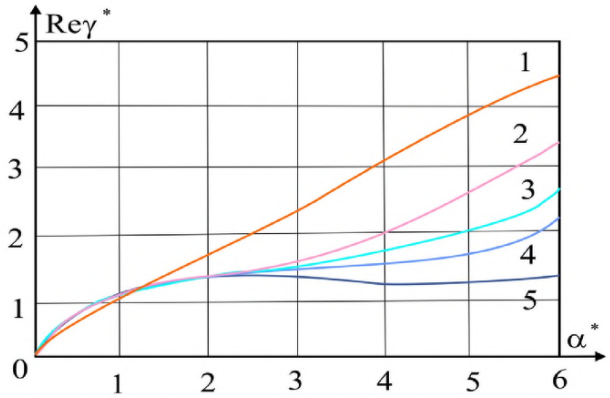


Рис. 1. Влияние толщенного параметра на дисперсионные свойства первых нормальных осесимметричных волн в полом цилиндре: сплошные – первая волна.

1 – $r_1 = 0.3$, 2 – $r_1 = 0.8$, 3 – $r_1 = 0.9$, 4 – $r_1 = 0.95$, 5 – $r_1 = 0.99$

На рис. 1 изображены реальные части дисперсионных кривых осесимметричных волн для полого вязкоупругого цилиндра при различных значениях внутреннего радиуса цилиндра. Влияние толщинного параметра на дисперсионные свойства первых нормальных осесимметричных волн в полом цилиндре: сплошные – первая волна1 – $r_1 = 0.3$, 2 – $r_1 = 0.8$, 3 – $r_1 = 0.9$, 4 – $r_1 = 0.95$, 5 – $r_1 = 0.99$.

При вычислении принята ν =0.25, и внутренний радиус $a \in (0.39 \div 0.9)$. На рис. 2 сплошными линиями отмечены реальные части первой дисперсионной кривой. Видно, что с увеличением волнового числа соответствующие дисперсионные кривые увеличиваются с ускоренным темпом.

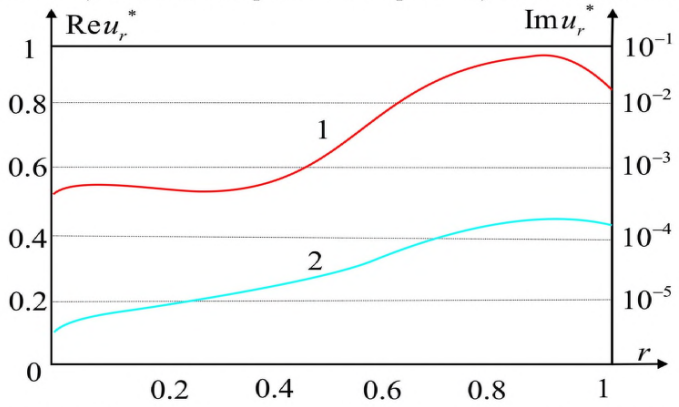


Рис. 2. Распределение по радиусу нормированных комплексных амплитуд смещений в первой нормальной волне (α = 10):1. $\mathrm{Re}\,u_r^*$; 2. $\mathrm{Im}\,u_r^*$.

Для $0 < \alpha < 1$ величинах волнового числа первые дисперсионные кривые при различных r_1 практически одинаковы. Соответствующая фазовая скорость удовлетворяет следующие выражения

$$\mathrm{Re}\frac{c_R}{c_s} = \Psi\sqrt{2(1+\nu)} \approx 1.5731,$$

где Ψ –параметр, который характеризует вязкие свойства материалов цилиндра. Если $\alpha > 1$, тогда с увеличением волнового числа реальная и мнимая части низшей моды фазовой скорости существенно уменьшаются с увеличением r_1. С уменьшением толщины полого цилиндра реальные и мнимые части первой и второй мод отклоняются друг от друга и плавно уменьшается первая мода фазовой скорости, а вторая мода – умеренно снижается. Когда a=0.97, полый цилиндр рассматривается как цилиндрическая оболочка. Дисперсионные кривые при $1.8 < \alpha < 3.0$ практически не изменяются, т.е. становятся горизонтальными по оси абсцисс. При дальнейшем увеличении волнового числа $\alpha > 3.0$ реальные и мнимые части фазовой скорости первой и второй мод, сначала возрастут и приближаются к скорости волны Рэлея [16,17].

3. Заключения. Исследованы свойства поверхностных волн в вязкоупругом полом цилиндре. Найдено, что в полом вязкоупругом цилиндре существуют две комплексные нормальные волны, реальные части которых в предельном случае приближаются к скорости волн Рэлея.

Установлено, что поверхностные волны в полом вязкоупругом цилиндре локализуются на внешней и внутренней свободной поверхностях цилиндра.

Список исползованной литературы:

(1). Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid, Proc. Lond. Math. Soc. 1885/1886, 17, № 253, p. 4–11.

(2). Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн. Физ. Акустика. Принципы и методы (пер. с англ.). 1973, 6, с. 137–202.

(3). Викторов И.А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах, 1979, 25, № 1, с. 1–17.

(4). Oliver J. A summary of observed seismic surface wave dispersion. Bull. Seism. Soc. Amer. 1959, 52, № 1, p. 81–90.

(5). Owen T.E. Surface wave phenomena in ultrasonics. Progr. Appl. Matter. Resch. 1964, 6, p. 69–87.

(6). Uberal H. Surface waves in acoustics. Phys. acoustics: Principles and metods. 10, 1973, p. 1–60.

(7). Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К., "Наук. думка", 1981, 283 с.

(8). Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью. "Прикл. мех.", 1984, 20, № 8, с. 25–29.

(9). Комиссарова Г.Л. К решению задачи о распространении волн в цилиндре с жидкостью. Прикл. мех. 1990, 26, № 8, с. 25–29.

(10). Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах. Акуст. вісн., 2000, 3, № 3, с. 44–55.

(11). Комиссарова Г.Л. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах. "Прикл. мех.", 2002, 38, № 1, с. 124–134.

(12). Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Особенности динамического деформирования полого цилиндра. "Прикл. мех.", 1986, 22, № 5, с. 3–8.

(13). Rosenberg R.L., Thurston R.N. Relationship between plate and surface modes of a tube. J.Acoust. Soc. Amer. 1977, 61, № 6, p. 1499–1502.

(14). Thurston R.N. Elastic waves in rod and clad rods. J. Acoust. Soc. Amer. 1978, 64, № 1, p. 1–37.

(15). Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К., "Наук. думка", 1978, 264 с.

(16). Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновое процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. Германия, LAP, Lambert Academic Publishing. 212–220 p.

(17). Сафаров И.И., Болтаев З.И. Распространение гармонических волн в пластинке переменной толщины. Известия высших учебных заведений Поволжский регион. «Физико-математические науки». 2011, № 4 (20), с. 24345.

Кутлымуратов Баймурат Жиенбаевич (КГУ им. Бердаха, Нукус, Узбекистан)

О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ГРАНИЧНЫМ СВОЙСТВОМ МОРЕРА

Аннотация. *В этой работе устанавливается аналог многомерной граничной теоремы Морера для матричного шара третьего типа – области, образованной векторами кососимметрических матриц. В отличие от известных результатов для непрерывных функций [1,2,3], здесь рассматриваются интегрируемые функции класса* $L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$, $p \geq 1$. *Полученный результат обобщает теорему Нагеля-Рудина на случай интегрируемых функций на остове матричного шара третьего типа.*

Ключевые слова: *матричный шар третьего типа, кососимметрические матрицы, граничная теорема Морера, автоморфизмы, ядро Пуассона, интегрируемые функции.*

Qutlimuratov Baymurat Jienbaevich (Berdaq nomidagi QQDU, Nukus, O'zbekiston)

CHEGARAVIY MORERA XOSSASIGA EGA INTEGRALLANUVCHI FUNKSIYALARNING GOLOMOR DAVOM ETTIRILISHI HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu ishda uchinchi tipdagi matritsaviy shar – kososimmetrik matritsalar vektorlaridan tashkil topgan soha uchun ko'p o'lchovli chegaraviy Morera teoremasining analogi isbotlangan. Uzluksiz funksiyalar uchun ma'lum bo'lgan natijalardan [1,2,3], farqli ravishda, bu yerda* $L^p(\mathrm{X}^3_{mn})$,