Алишер Яхшимуратов (Университет Мамуна), Оллаберган Матёкубов (УрГУ)

РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КАУПА В ВИДЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Аннотация. *В этой работе рассматриваются решения системы Каупа в классе бегущих волн. Задача приводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению с полиномиальной правой частью четвёртой степени. Анализируя это уравнение, найдены все решения системы Каупа в классе бегущих волн. При этом получены решения, выражающиеся через рациональные, гиперболические, тригонометрические, а также эллиптические функции.*

Ключевые слова: *система Каупа, нелинейное уравнение в частных производных, решение в виде бегущей волны, решения выражающиеся через эллиптические функции, солитонное решение.*

Alisher Yaxshimuratov (Ma'mun universiteti), Ollabergan Matyqubov (UrDU)

KAUP SISTEMASINING YUGURUVCHI TO'LQIN KO'RINISHIDAGI YECHIMLARI

Annotatsiya. *Ushbu ishda Kaup sistemasining yuguruvchi to'lqinlar sinfidagi yechimlari qaralgan. Masala o'ng tomonida to'rtinchi darajali polinom bo'lgan nochiziqli oddiy differensial tenglamaga keltirilgan. Ushbu tenglama tahlil qilinib, Kaup sistemasining yuguruvchi to'lqinlar sinfidagi barcha yechimlari topilgan. Ratsional, giperbolik, trigonometrik va elliptik funksiyalar orqali ifodalanadigan yechimlari olingan.*

Kalit so'zlar: *Kaup sistemasi, nochiziqli xususiy hosilali tenglama, yuguruvchi to'lqin ko'rinishidagi yechim, elliptik funksiya orqali ifodalanadigan yechim, soliton yechim.*

Alisher Yakhshimuratov (Mamun University), Ollabergan Matyokubov (UrSU)

SOLUTIONS OF THE KAUP SYSTEM IN THE FORM OF A TRAVELING WAVE

Annotation. *In this paper, we consider solutions to the Kaup system in the class of traveling waves. The problem is reduced to a nonlinear ordinary differential equation with a fourth-degree polynomial right-hand side. By analyzing this equation, we find all solutions to the Kaup system in the class of traveling waves. Solutions, expressed in terms of rational, hyperbolic, trigonometric and elliptic functions are obtained.*

Keywords: *Kaup system, nonlinear partial differential equation, traveling wave solution, solutions ex-pressed in terms of elliptic functions, soliton solution.*

Введение. Одной из важных интегрируемых моделей является система Каупа, представляющая собой связанное уравнение для двух функций $p(x,t)$ и $q(x,t)$. Интегрируемость этой системы в классе убывающих функций впервые показана в работе [1], а в работе [2], получены комплексные конечнозонные многофазовые решения, выражающиеся через тэта-функции Римана, найдены многосолитонные решения, а также изучена асимптотика этих решений. В работе [3] изучены вещественные конечнозонные регулярные решения системы Каупа. В работах [4,5] исследованы система Каупа и ее обобщения с самосогласованным источником в классе периодических по пространственной переменной функций, а в статьях [6,7] рассматривается система Каупа с источником в классе убывающих функций.

Особый интерес представляют решения в виде бегущих волн, которые описывают устойчивые нелинейные структуры, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения профиля. Такие решения лежат в основе теории солитонов и играют важную роль в приложениях. Редукция системы Каупа к обыкновенным дифференциальным уравнениям с использованием анзаца бегущей волны приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению с полиномиальной правой частью четвёртой степени. Анализ этого уравнения позволяет получить решения, выражающиеся через рациональные, гиперболические, тригонометрические, а также эллиптические функции. В этой работе найдены все решения системы Каупа в классе бегущих волн.

Основная часть. Рассмотрим систему Каупа

$$\begin{cases} p_t = -6pp_x - q_x, \\ q_t = p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x. \end{cases} \tag{1}$$

Ищем все решения этой системы в виде бегущей волны $p = z(x+at)$, $q = y(x+at)$, где a постоянная, которая может принимать как действительные, так и комплексные значения. Для удобства введем обозначение $u = x + at$. Подставляя эти выражения в систему (1) ,получим

$$az' = -6zz' - y', \tag{2}$$

$$ay' = z''' - 4yz' - 2zy'. \tag{3}$$

Из (2) находим, что $y' = -6zz' - az'$, $y = -3z^2 - az - b$. Используя это, перепишем уравнение (3) в виде

$$z''' + 24z^2z' + 12azz' + (a^2 + 4b)z' = 0.$$

Отсюда имеем

$$z'' + 8z^3 + 6az^2 + (a^2 + 4b)z + c = 0.$$

Умножая на $2z'$, находим, что

$$z'^2 = -4P(z), \tag{4}$$

где $P(z) = z^4 + az^3 + \frac{a^2 + 4b}{4}z^2 + \frac{c}{2}z + \frac{d}{4}$ многочлен четвертой степени.

Рассмотрим следующие всевозможные случаи.

1-случай. Пусть многочлен $P(z)$ имеет только один корень кратности 4, т.е. $P(z) = (z - z_0)^4$. Тогда уравнение (4) примет вид $z'^2 = -4(z - z_0)^4$. Отсюда получим, что $z = z_0 \pm \frac{i}{2(u - u_0)}$.

Из теоремы Виета имеем $a = -4z_0$, $b = 2z_0^2$. Поэтому, в этом случае

$$p(x,t) = z_0 \pm \frac{i}{2(x - 4z_0t - u_0)},$$

$$q(x,t) = -3\left(z_0 \pm \frac{i}{2(x - 4z_0t - u_0)}\right)^2 + 4z_0\left(z_0 \pm \frac{i}{2(x - 4z_0t - u_0)}\right) - 2z_0^2.$$

В частности, при $z_0 = -\frac{1}{2}, u_0 = -\frac{1}{2}$, взяв знак плюс, отсюда получим более простое решение

$$p(x,t) = \frac{i}{2x + 4t + 1} - \frac{1}{2},$$

$$q(x,t) = \frac{3}{(2x + 4t + 1)^2} + \frac{i}{2x + 4t + 1} - \frac{1}{4}.$$

Отметим, что только в случае $z_0 = 0$ получим решение, стремящееся к нулю в бесконечности:

$$p(x,t) = \pm\frac{i}{2(x - u_0)},\ q(x,t) = \frac{3}{4(x - u_0)^2}.$$

2-случай. Пусть многочлен $P(z)$ имеет один корень кратности 3 и один простой корень, т.е. $P(z) = (z - z_1)^3(z - z_2)$. Тогда уравнение (4) примет вид $z'^2 = -4(z - z_1)^3(z - z_2)$. Сделаем замену переменных $z = z_1 + \frac{z_1 - z_2}{v^2 - 1}$. Тогда $v'^2 = -(z_1 - z_2)^2$. Поэтому $v = \pm i(z_1 - z_2)(u - u_0)$. Отсюда получим, что $z = z_1 - \frac{z_1 - z_2}{(z_1 - z_2)^2(u - u_0)^2 + 1}$.

Из теоремы Виета имеем $a = -3z_1 - z_2$, $b = \frac{1}{4}(3z_1^2 - z_2^2 + 6z_1z_2)$. Поэтому, в этом случае

$$p(x,t)=z_1-\frac{z_1-z_2}{(z_1-z_2)^2[x-(3z_1+z_2)t-u_0]^2+1},$$

$$q(x,t)=-3p^2(x,t)+(3z_1+z_2)p(x,t)-\frac{1}{4}(3z_1^2-z_2^2+6z_1z_2).$$

В частности, при $z_1=0,\ z_2=1,\ u_0=0$ отсюда получим более простое решение

$$p(x,t)=\frac{1}{(x-t)^2+1},\ q(x,t)=-\frac{3}{[(x-t)^2+1]^2}+\frac{1}{(x-t)^2+1}+\frac{1}{4}.$$

3-случай. Пусть многочлен $P(z)$ имеет два различных двукратных корней, т.е. $P(z)=(z-z_1)^2(z-z_2)^2$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$z'^2=-4(z-z_1)^2(z-z_2)^2.$$

Отсюда находим, что $z=z_2+\frac{z_2-z_1}{e^{\pm 2i(z_1-z_2)(u-u_0)}-1}$.

Из теоремы Виета имеем $a=-2(z_1+z_2),\ b=2z_1z_2$. Поэтому, в этом случае

$$p(x,t)=z_2+\frac{z_2-z_1}{e^{\pm 2i(z_1-z_2)[x-2(z_1+z_2)t-u_0]}-1},$$

$$q(x,t)=-3p^2(x,t)+2(z_1+z_2)p(x,t)-2z_1z_2.$$

В частности, при $z_1=1,\ z_2=0,\ u_0=0$, взяв знак плюс, отсюда получим более простое решение

$$p(x,t)=\frac{1}{1-e^{2i(x-2t)}},\ q(x,t)=-\frac{3}{(1-e^{2i(x-2t)})^2}+\frac{2}{1-e^{2i(x-2t)}}.$$

При $z_1=-i,\ z_2=0,\ u_0=-\frac{1}{2}$, взяв знак плюс, получим решение

$$p(x,t)=\frac{i}{e^{2x+4it+1}-1},\ q(x,t)=\frac{3}{(e^{2x+4it+1}-1)^2}+\frac{2}{e^{2x+4it+1}-1}.$$

4-случай. Пусть многочлен $P(z)$ имеет три различных корня, при этом один корень двукратный, а две остальные простые, т.е. $P(z)=(z-z_1)^2(z-z_2)(z-z_3)$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$z'^2=-4(z-z_1)^2(z-z_2)(z-z_3).$$

Сделаем замену переменных $z=z_2+\frac{z_2-z_3}{v^2-1}$. Тогда

$$v'^2=-(z_1-z_2)^2\left(v^2-\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right)^2.$$

Решая это уравнение, находим, что

$$v=\text{m}\sqrt{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}}\cdot ctg\{\sqrt{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}(u-u_0)\},$$

$$z=z_2-\frac{z_2-z_3}{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}ctg^2\{\sqrt{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}(u-u_0)\}+1}.$$

Из теоремы Виета имеем

$$a=-(2z_1+z_2+z_3),\ b=\frac{1}{4}(-z_2^2-z_3^2+4z_1z_2+4z_1z_3+2z_2z_3).$$

Поэтому, в этом случае

$$p(x,t)=z_2-\frac{z_2-z_3}{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}ctg^2\{\sqrt{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}[x-(2z_1+z_2+z_3)t-u_0]\}+1},$$

$$q(x,t)=-3p^2(x,t)+(2z_1+z_2+z_3)p(x,t)+\frac{1}{4}(z_2^2+z_3^2-4z_1z_2-4z_1z_3-2z_2z_3).$$

В частности, при $z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}, z_2=0, z_3=\frac{4}{\sqrt{3}}, u_0=0$, отсюда получим более простое решение

$$p(x,t)=\frac{4}{\sqrt{3}[3cth^2(x-2\sqrt{3}t)+1]},$$

$$q(x,t)=-\frac{16}{[3cth^2(x-2\sqrt{3}t)+1]^2}+\frac{8}{3cth^2(x-2\sqrt{3}t)+1}.$$

При $z_1=2, z_2=0, z_3=\frac{3}{2}, u_0=0$, отсюда получим более простое решение

$$p(x,t)=\frac{6}{4+ctg^2\left(x-\frac{11}{2}t\right)},$$

$$q(x,t)=-\frac{108}{\left[4+ctg^2\left(x-\frac{11}{2}t\right)\right]^2}+\frac{33}{4+ctg^2\left(x-\frac{11}{2}t\right)}-\frac{39}{16}.$$

5-случай. Пусть многочлен $P(z)$ имеет четыре различных корня, т.е. $P(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$z'^2=-4(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4).$$

Сделаем замену $z=z_2+\frac{z_2-z_3}{hv^2-1}$, $h=\frac{z_4-z_3}{z_4-z_2}$. Тогда

$$v'^2=(z_4-z_2)(z_3-z_1)(1-v^2)(1-k^2v^2),$$

где $k=\sqrt{\frac{(z_4-z_3)(z_2-z_1)}{(z_4-z_2)(z_3-z_1)}}$. Отсюда имеем

$$\int_0^v\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\pm(u-u_0)\sqrt{(z_4-z_2)(z_3-z_1)}.$$

Из определения эллиптической синус-функции Якоби, выводим, что

$$v=sn(\pm(u-u_0)\sqrt{(z_4-z_2)(z_3-z_1)},k).$$

Используя замену переменных, находим,

$$z = z_2 + \frac{z_2 - z_3}{\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} sn^2\{(u-u_0)\sqrt{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}, k\} - 1}.$$

Из теоремы Виета имеем

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3 + z_4),$$

$$b = -\frac{1}{4}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 2z_1z_2 - 2z_1z_3 - 2z_1z_4 - 2z_2z_3 - 2z_2z_4 - 2z_3z_4).$$

Поэтому, в этом случае

$$p(x,t) = z_2 + \frac{z_2 - z_3}{\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} sn^2\{[x - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)t - u_0]\sqrt{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}, k\} - 1},$$

$$q(x,t) = -3p^2(x,t) + (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)p(x,t) +$$

$$+\frac{1}{4}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - 2z_1z_2 - 2z_1z_3 - 2z_1z_4 - 2z_2z_3 - 2z_2z_4 - 2z_3z_4).$$

В частности, при $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1, z_4 = 2, u_0 = 0$, получим более простое решение

$$p(x,t) = \frac{2}{2 - sn^2(2x - 4t, \frac{1}{2})},$$

$$q(x,t) = -\frac{12}{[2 - sn^2(2x - 4t, \frac{1}{2})]^2} + \frac{4}{2 - sn^2(2x - 4t, \frac{1}{2})} + 2.$$

Заключение. В этой работе рассматриваются решения системы Каупа в классе бегущих волн. Задача приводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению с полиномиальной правой частью четвёртой степени. Анализируя это уравнение, найдены все решения системы Каупа в классе бегущих волн. При этом получены решения, выражающиеся через рациональные, гиперболические, тригонометрические, а также эллиптические функции.

Список использованной литературы:

(1). Kaup D.J. A higher-order water-wave equation and the method for solving it. Prog. Theor. Phys. 1975, vol. 54, p. 396–408.

(2). Matveev V.B., Yavor M.I. Solutions presque periodiques et a N-solitons de l'equation hydrodynamique nonlineaire de Kaup. Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A. 1979, vol. 31, p. 25–41.

(3). Смирнов А.О. Вещественные конечнозонные регулярные решения уравнения Каупа-Буссинеска. Теор. матем. Физика, 1986, т. 66:1, с. 30–46.

(4). Cabada A., Yakhshimuratov A. The system of Kaup equations with a self-consistent source in the class of periodic functions. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2013, vol. 9:3, p. 287–303.

(5). Yakhshimuratov A., Kriecherbauer T., Babajanov B. On the construction and integration of a hierarchy for the Kaup system with a self-consistent source in the class of periodic functions. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2021, vol. 17:2, p. 233–257.

(6). Babajanov B.A., Azamatov A.Sh. Integration of the Kaup-Boussinesq system with a self-consistent source via inverse scattering method. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki. 2022, vol. 32:2, p. 153–170.

(7). Babajanov B.A., Sadullaev Sh.O., Ruzmetov M.M. Integration of the Kaup-Boussinesq system via inverse scattering method. Partial Differential Equations in Applied Mathematics. 2024, vol. 11, p. 100813.