termodinamik harorat, moddaning miqdori va yorug‘lik kuchi. 2005-yil oktabr oyida xalqaro og‘irlik va o‘lchovlar qo‘mitasi (XOO‘Q) 2011-yilda kilogramm, amper, Kelvin va molni qayta aniqlash bo‘yicha tayyorgarlik choralari bo‘yicha tavsiyanomani qabul qildi, shunda bu birliklar asosiy konstantalarning aniq ma’lum qiymatlariga bog‘lanadi. Ushbu to‘rtta asosiy birlikka yangi ta’riflar berilishi kerak, ularni $h-$ Plank doimiysi, $e-$ elementar zaryad, $k-$ Boltsman doimiysi va N_A –Avogadro doimiysining aniq belgilangan qiymatlari (nol noaniqlik) bilan bog‘lash kerak:

▪kilogramm shunday massa birligiki, Plank doimiysi aynan $h = 6{,}6260693 \cdot 10^{-34}\, J \cdot c$ ga teng;

▪amper elektr tokining shunday birligiki, elementar zaryad aynan $e = 1{,}60217653 \cdot 10^{-19}\, C$ ga teng;

▪Kelvin termodinamik haroratning shunday birligiki, Boltsman doimiysi aynan $k = 1{,}3806505 \cdot 10^{-23}\, J\,/\,K$ ga teng;

▪mol-bu strukturaviy elementlar (atomlar, molekulalar, ionlar, elektronlar, boshqa har qanday zarralar yoki aniq belgilangan zarrachalar guruhlari)dan tashkil topgan modda miqdorining birligiki, Avogadro doimiysi aniq $N_A = 6{,}0221415 \cdot 10^{23}\ {}^{1}/_{mol}$ ga teng.

Bu shuni anglatadiki, SIning yettita asosiy birligidan oltitasi haqiqiy tabiiy invariantlar orqali aniqlanadi. Bundan tashqari, nafaqat ushbu to‘rtta asosiy doimiylar aniq belgilangan qiymatlarga ega bo‘ladi, balki boshqa ko‘plab fundamental fizik doimiylarning noaniqliklari ham yo‘q qilinadi yoki sezilarli darajada kamayadi.

Xulosa. FFD bilan bog‘liq yana bir muammo shundaki, nima uchun ularning qiymatlari yerdagi hayotning paydo bo‘lishi va mavjudligi uchun zarur bo‘lgan juda tor oraliqda yotadi (atomlarning barqarorligi, Quyoshga ham tegishli bo‘lgan yulduzlarning yashash vaqti, tirik mavjudotlarning yashashi uchun yerdagi harorat, okeanlar mavjudligi va boshqalar).

Bir nechta mumkin bo‘lgan va to‘liq ishonarli bo‘lmagan tushuntirishlar mavjud:

▪Birinchidan, garchi bu dalilning ehtimoli juda kichik va ahamiyatsiz bo‘lsa-da, biz barcha mumkin bo‘lgan FFD to‘plamlari bilan aniqlanuvchi olamda emas, yuqorida keltirilgan FFD bilan aniqlanuchi olamda yashayotganimiz tasodifiydir.

▪Ikkinchidan, hayot biz bilmagan boshqa ko‘rinishlarda va boshqa FFD to‘plamlari uchun mavjud bo‘lishi mumkin.

▪Uchinchidan, biznikidan boshqa olamlarda boshqa har qanday FFD to‘plamlari amalga oshirilishi mumkin [2;4-b.].

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Коржавов М.Ж., Турсунов Қ.Ш. Оламнинг физик манзараси–умумлаштириш методи сифатида. “Муғаллим ҳам узликсиз билимлендириў”, № 3, 2021, илмий-методикалик журнал, 84–91-бетлар.

(2). В.В.Чесноков. Физические основы измерений. Учеб. пособие, Новосибирск, СГГА, 2008, 101 с.

(3). Xolbayev I., Стандарт модел ҳақида. “Физика, математика ва информатика” илмий-услубий журнали, 2022, 2-сон, 3–13-бетлар.

(4). Korjavov M.J., Tursunov Q.Sh., Toshpo‘latov Ch., Raximov A.X. Kvant nazariyasining paydo bo‘lishida Plank g‘oyalarining tutgan o‘rni. “Fizika, matematika va informatika” ilmiy-uslubiy jo‘rnali. .№ 6, 2011, 37–41-betlar.

Шарипов Расулбек Ахмедович (доцент кафедры математического анализа Ургенчского государственного университета, r.sharipov@urdu.uz),
Исмоилов Мухиддин Бахром угли (преподаватель кафедры математического анализа Ургенчского государственного университета, mukhiddin4449@gmail.com)

ПОЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА m -ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. *В статье рассмотрены полярные множества для класса m -выпуклых $m-cv$ функций в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$.Введено понятие $m-cv$ полярности множества, а также доказаны его важные свойства. Показано, что при $1<m<n$ класс $m-cv$ полярных множеств существенно отличается от классических полярных множеств. Также доказано, что для $m=1$, такое множество не существует.*

Ключевые слова: *сильно m -субгармоническая функция, выпуклая функция, m -выпуклая функция, $m-cv$ полярные множества, Гессиан.*

Sharipov Rasulbek Axmedovich (Urganch davlat universiteti "Matematik analiz" kafedrasi dotsenti, r.sharipov@urdu.uz),
Ismoilov Muxiddin Baxrom o'g'li (Matematik analiz kafedrasi o'qituvchisi Urganch davlat universiteti, mukhiddin4449@gmail.com)

m -QAVARIQ FUNKSIYALARNING POLYAR TO'PLAMLARI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada haqiqiy $\mathbb{R}^n$ fazosidagi m -qavariq ($m-cv$) funksiyalar sinfi uchun polyar to'plamlar o'rganilgan. Unda $m-cv$ polyar tushunchasi kiritilib, bu to'plamning muhim xossalari isbotlangan. Bu yerda $1<m<n$ bo'lgan holda $m-cv$ polyar to'plamlar klassik polyar to'plamlardan sezilarli darajada farq qilishi va $m=1$ holatida esa $1-cv$ polyar to'plamning mavjud emasligi ko'rsatilgan.*

Kalit so'zlar: *kuchli m -subgarmonik funksiya, qavariq funksiya, m -qavariq funksiya, $m-cv$ polyar to'plamlar, Gessian.*

Sharipov Rasulbek Akhmedovich (Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis of the Urgench State University; r.sharipov@urdu.uz),
Ismoilov Mukhiddin Bakhrom ugli (Lecturer of the Department of Mathematical Analysis of the Urgench State University; mukhiddin4449@gmail.com)

POLAR SETS OF m -CONVEX FUNCTIONS

Annotation. *In this article, the polar sets for the class of m -convex ($m-cv$) functions in the real space $\mathbb{R}^n$ are studied. The concept of $m-cv$ polarity is introduced, and important properties of these sets are proven. It is shown that for $1<m<n$, the class of $m-cv$ polar sets differ significantly from classical polar sets, and in the case of $m=1$, a $1-cv$ polar sets do not exist.*

Key words: *strongly m -subharmonic function, convex function, m -convex function, $m-cv$ polar sets, Hessian.*

Введение. В современной математике теория выпуклых и субгармонических функций играет ключевую роль в анализе сложных нелинейных дифференциальных уравнений и геометрическом анализе. Статья посвящена изучению полярных множеств в классе m -выпуклых функций, что представляет собой новое направление в теории потенциала. Данная работа направлена на исследование свойств этих множеств, их отличий от классических полярных множеств и связи с сильно m -субгармоническими функциями. m -выпуклые функции $(m-cv)$ являются вещественным аналогом в $\mathbb{R}^n$ сильно m -субгармонических $\left(sh_m\right)$ функций в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Теория сильно m -субгармонических функций представляет собой хорошо развитую область теории функций и в настоящее время остается предметом активных исследований (З.Блоцкий [5], С.Динев и С. Колодзей [7;8 с.], С.Ли [10], Х.Ч.Лу [11,12] и др.). Достаточно полный обзор данной теории представлен в работе А.Садуллаева и Б. Абдуллаева [14]. Поэтому здесь мы приводим их очень кратко, чтобы хорошо объяснить новые понятия $m-cv$ полярные множества.

Определение 1. Дважды непрерывно дифференцируемая $u(z)$ функция в $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}^n$, $u(z)\in C^2(\mathbb{D})$, называется сильно $m-$субгармонической $(1\le m\le n)$, если в каждой точке области $\mathbb{D}$ выполняются неравенства

$$\left(dd^c u\right)^s\wedge\beta^{n-s}\ge 0,\quad s=1,2,\ldots,n-m+1, \tag{1}$$

где $\beta=dd^c\left\|z\right\|^2$ – стандартная форма объема в $\mathbb{C}^n$.

Если $\lambda_u=\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\in\mathbb{R}^n$ – это собственные значения эрмитовой матрицы $\left(\dfrac{\partial^2 u(z)}{\partial z_k\partial\overline{z}_t}\right)$, то выполняется:

$$\left(dd^c u\right)^s\wedge\beta^{n-s}=s!\left(n-s\right)!H^s\left(u\right)\beta^n,$$

где гессиан $H^s(u)$ определяется как:

$$H^s\left(u(z)\right)=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_s\le n}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_s}$$

и его размерность соответствует вектору $\lambda = \lambda(u) \in \mathbb{R}^n$.

Следовательно, если функция $u(z)$ принадлежит классу $C^2\left(\mathbb{D}\right)$, где $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, то она является сильно m-субгармонической, если в каждой точке $z \in \mathbb{D}$ выполняются условия:

$$H^s\left(u(z)\right) \geq 0, \quad s = 1,2,\ldots,n-m+1.$$

Существует полезная теорема

Теорема 1 ([5]). *Пусть* $v_1,\ldots,v_s \in sh_m(\mathbb{D}) \cap C^2(\mathbb{D})$, *где* $1 \leq s \leq n-m+1$. Тогда выполняется неравенство:

$$dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_s \wedge \beta^{n-s} \geq 0.$$

В частности, если $u \in sh_m(\mathbb{D}) \cap C^2(\mathbb{D})$, *то для любых выполняется:*

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \geq 0. \tag{2}$$

Данное свойство имеет обратный характер: если дважды гладкая функция u удовлетворяет этому неравенству для всех $v_1,\ldots,v_{n-m}$, принадлежащих $sh_m(\mathbb{D}) \cap C^2(\mathbb{D})$, то она обязательно является сильно m-субгармонической. При этом достаточно рассмотреть класс полиномов вида:

$$v_j = \sum_{d=1}^{n} c_{jd}\left|z_d\right|^2 \qquad c_{jd} \in sh_m(\mathbb{C}^n), \quad c_{jd} \in \mathbb{R} = \text{const}. \tag{3}$$

Используя теорему 1, можно ввести следующее определение.

Определение 2. Функция $u \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$ называется сильно m-субгармонической в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, если она является полунепрерывной сверху и для любых дважды гладких сильно m-субгармонических функций $v_1,\ldots,v_{n-m}$ вида (3) поток $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}$, определяется как

$$\left[dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}\right]\left(\omega\right) = \int u\, dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F^{0,0}$$

положителен.

Определение m-выпуклых функций. Теория m-выпуклых ($m-cv$) функций представляет собой новое направление в геометрическом анализе. Данный класс функций занимает промежуточное положение между классом субгармонических и выпуклых функций, т.е. при $m = 1$ данный класс функций совпадает с классом выпуклых функций, фундаментальные аспекты которых подробно исследованы в работах А.Д.Александрова, И.Я.Бакельмана и других авторов (см. [1], [2], [3], [4]). При $m = n$ данный класс эквивалентен классу субгармонических функций, которые являются хорошо изученным объектом теории функций. В отличие от этих предельных случаев, определение m-выпуклых функций при $1 < m < n$ существенно отличается по своей природе, поскольку оно опирается на свойства высоко порядковых гессианов. Изучению данного класса функций посвящена серия работ Н.Трудингера, Н.Ивочкина, Х.Уванга, Чжоу К.С. и других исследователей (см. [6], [9], [17], [18], [19], [20]).

m-выпуклые функции являются обобщением классических выпуклых функций, их определение основано на гессиане размерности s от собственных значений симметрической матрицы второго порядка. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ область, и пусть $u(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в D, $u(x) \in C^2(D)$. Обозначим через $\lambda_u = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ собственные значения симметрической матрицы $\left(\dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_t}\right)$, где выполняется условие симметрии:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t \partial x_k}$, $\forall k,t$. Определим гессиан размерности s от вектора собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ следующим образом:

$$H^s\left(u(x)\right) = H^s(\lambda) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_s \le n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \ldots \lambda_{j_s}.$$

Определение 3. Функция $u(x)$, принадлежащая классу $C^2(D)$, называется m-выпуклой в области $D \subset \mathbb{R}^n$, если для всех $x \in D$ выполняется неравенство:

$$H^s\left(\lambda(x)\right) \ge 0, \quad s = 1, \ldots, n-m+1 \tag{4}$$

где $\lambda = \lambda(x) = \left(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x)\right)$ – вектор собственных значений гессиана функции $u(x)$.

1. Постановка задачи и метод решения. С целью расширения области определения m-выпуклых ($m-cv$) функций из класса $C^2(D)$ на класс полунепрерывных функций мы предлагаем новый метод. Он основывается на взаимосвязи между m-выпуклыми функциями и сильно m-субгармоническими (sh_m) функциями в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Благодаря богатому набору свойств sh_m-функций, мы проводим исследование $m-cv$ полярных множеств в рамках класса m-выпуклых функций. Чтобы выявить связь между $m-cv$ и sh_m-функциями, мы рассматриваем вложение вещественного пространства $\mathbb{R}^n_x$ в комплексное пространство $\mathbb{C}^n_z$: $\mathbb{R}^n_x \subset \mathbb{C}^n_z = \mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n_y$, $z = x + iy$, где $\mathbb{R}^n_x$ интерпретируется как вещественное n-мерное подпространство. Далее мы продолжаем функцию $u(x)$, заданную на области $D \subset \mathbb{R}^n_x$, на область $D \times i\mathbb{R}^n_y \subset \mathbb{C}^n_z$, принимая её константной на параллельных плоскостях: $\Pi_{x^0} = \{z \in \mathbb{C}^n : x = x^0, y \in \mathbb{R}^n\}$. Таким образом, полученная продолженная функция имеет вид: $u^c(z) = u^c(x+iy) = u(x)$.

Имеет место следующие теорема, которые являются основными методами исследования $m-cv$ функций в нашем рассмотрении.

Теорема 2. (см. [15], [16]). *Функция $u\left(x\right) \in C^2\left(D\right)$, $D \subset \mathbb{R}^n_x$, является $m-cv$ в D тогда и только тогда когда функция $u^c\left(z\right) = u^c\left(x+iy\right) = u\left(x\right)$ которая не зависит от переменных $y \in \mathbb{R}^n_y$, является sh_m функцией в области $D \times i\mathbb{R}^n_y$.*

Определение 4. Функция $u(x) \in L^1_{loc}\left(D\right)$ называется m-выпуклой в области $D \subset \mathbb{R}^n_x$, , если она является полунепрерывной сверху и для любых дважды гладких m-выпуклых функций $v_1, \ldots, v_{n-m}$ поток формы

$$dd^c u^c \wedge dd^c v_1^c \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m}^c \wedge \beta^{m-1}$$

определяется как

$$\left[dd^c u^c \wedge dd^c v_1^c \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m}^c \wedge \beta^{m-1}\right]\left(\omega\right) = \int u^c dd^c v_1^c \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m}^c \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega,$$

и является положительным для всех $\omega \in F^{0,0}\left(D \times i\mathbb{R}^n_y\right)$.

Следствие 1. *Если* $u(x)$ *принадлежит классу* m*-выпуклых функций, то для любой* m*-мерной плоскости* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *сужение* $u\big|_{\Pi}$ *будет субгармонической функцией. Таким образом,* $u\big|_{\Pi}$ *также принадлежит классу сильно* m*-субгармонических функций:* $u\big|_{\Pi} \in m-cv = sh$.

2. $m-cv$ **полярные множества.** Аналогично понятию полярных множеств, введём определение $m-cv$ полярного множества.

Определение 5. Множество $E \subset D \subset \mathbb{R}^n$ называется $m-cv$ полярным в D, если существует функция $u(x) \in m-cv(D)$, $u(x) \not\equiv -\infty$, такая, что $u\Big|_E = -\infty$.

Так как класс $m-cv(D)$ является подмножеством $sh(D)$, каждое $m-cv$ полярное множество также является полярным. В частности, для $m-cv$ полярного множества выполняется $\mathcal{H}_{n-2+\varepsilon}(E)=0 \ \ \forall \varepsilon > 0$, что, в свою очередь, приводит к тому, что лебегова мера $m-cv$ полярного множества равна нулю.

$m-cv$ полярные множества оказываются пустыми при $m < \frac{n}{2}+1$, иными словами, если $E \subset D$ является $m-cv$ полярным и $m < \frac{n}{2}+1$, то $E = \varnothing$. Это объясняется тем, что при $m < \frac{n}{2}+1$ любая $m-cv$ функция является гёльдеровой (см. [18]). Однако, если $m \geq \frac{n}{2}+1$, существуют непустые $m-cv$ полярные множества. Таким образом, изучение свойств $m-cv$ полярных множеств имеет смысл только при $m \geq \frac{n}{2}+1$.

Теорема 3. *Счетное объединение* $m-cv$ *полярных множеств* $m-cv$ *полярно, т.е. если* $E_j \subset D$ *являются* $m-cv$ *полярными, то* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ *– тоже* $m-cv$ *полярное.*

Доказательства. Мы вложим вещественное пространство $\mathbb{R}^n_x$ в соответствующее комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n_x \subset \mathbb{C}^n_z = \mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n_y \left(z = x+iy\right)$, как вещественное $n-$мерное подпространство. Пусть $E_j \subset D \subset \mathbb{R}^n_x, j = 1,2,\ldots$, $m-cv$ полярные множества. В этом случае, существуют функции $u_j\left(x\right) \in m-cv\left(D\right)$, $u_j \not\equiv -\infty$, такие, что $u_j\Big|_{E_j} = -\infty$.

Существуют функции $u_j^c\left(z\right) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}^n_y)$, где $u_j^c\left(z\right) = u_j^c\left(x+iy\right) = u_j\left(x\right)$, которые не зависят от параметра $y \in \mathbb{R}^n_y$, такие что $u_j^c\left(z\right) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}^n_y)$. Ясно, что $u_j^c(z) \not\equiv -\infty$, $u_j^c\Big|_{E_j \times \mathbb{R}^n_y} = -\infty$. Согласно теореме 2 $u(x) \in m-cv(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $u^c(z) = u(x) \in sh_m(\mathbb{C}^n)$, отсюда мы получаем, что множество $E_j \times i\mathbb{R}^n_y$ является sh_m-полярным. Значить, из $m-cv$ полярности $E_j \subset D \subset \mathbb{R}^n_x$ получаем, что является $E_j \times i\mathbb{R}^n_y$ sh_m-полярными в области $D \times i\mathbb{R}^n_y$.

Так как счетное объединение sh_m-полярных множеств снова sh_m- полярно (основываясь на теореме Садуллаева-Абдуллаева [13]), то $F = \bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \times i\mathbb{R}^n_y)$ является sh_m-полярным в $D \times i\mathbb{R}^n_y$. Существует функция $w(z) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}^n_y)$: $w(z) \not\equiv -\infty$, $w\Big|_F = -\infty$. Причем, из построения

функции $w(z) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}^n_y)$ видно, что она не зависит от y, т.е. $w^c\left(x+iy\right) = w\left(x\right)$ и $w\left(x\right) \in m-cv\left(D\right)$, $w \not\equiv -\infty$, $w\,|_E = -\infty$. $\triangleright$

Теория потенциала обычно строится в регулярных областях относительно того или иного класса функций.

Определение 6. Область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется $m-cv$ регулярной, если существует функция $\rho(x) \in m-cv(D)$, удовлетворяющая следующим условиям: $\rho(x) < 0$ для всех $x \in D$, и $\varlimsup\limits_{x \to \partial D} \rho(x) = 0$. Такая область называется строго $m-cv$ регулярной, если в некоторой окрестности замыкания $D^+ \subset \overline{D}$ существует дважды непрерывно дифференцируемая строго $m-cv$ функция, при этом D можно представить как множество $\{\rho(x) < 0\}$. Строгая m-выпуклость функции $\rho(x)$ в D^+ означает, что для некоторого $\delta > 0$ разность $\rho(x) - \delta\|x\|^2$ является функцией из $m-cv(D^+)$.

Теорема 4. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ является $m-cv$ регулярной, и пусть существует подмножество $E \subset D$, такое что пересечение $E \cap G$ является $m-cv$ полярным в любой компактной подобласти $G \subset\subset D$. Тогда E будет $m-cv$ полярным в D. Кроме того, существует функция $u(x) \in m-cv(D)$, такая что $u(x) < 0$ для всех $x \in D$, $u(x) \not\equiv -\infty$, и $u(x) = -\infty$ для всех $x \in E$.*

Доказательство. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ является m-выпуклой ($m-cv$) регулярной областью. Тогда существует функция $\rho(x) \in m-cv(D)$ такая, что $\rho(x) < 0$ внутри D и $\lim\limits_{x \to \partial D} \rho(x) = 0$. Определим вложенные подмножества: $D_\delta = \{x \in D \mid \rho(x) < -\delta\} \Subset D, \quad \delta > 0$. Выберем подходящие связные компоненты D_δ, чтобы построить исчерпание вложенных множеств: $G_j \Subset G_{j+1}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j = D$, $G_1 \neq \varnothing$, где G_j — подходящая связная компонента открытого множества $D_{\delta_j} = \{x \in D \mid \rho(x) < -\delta_j\} \Subset D$, $\delta_j > 0$, $\delta_j \downarrow 0$.

По условию теоремы существует функция $v_j(x) \in m-cv(G_{j+2})$, такая, что она тождественно не равна $-\infty$, но принимает значение $-\infty$ на множестве $E \cap G_{j+2}$. Так как множество, где $v_j = -\infty$, имеет нулевую меру Лебега, найдётся точка $a \in G_1$, в которой $v_j(a) \neq -\infty$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Положим $M_j = \max\limits_{x \in \overline{G}_{j+1}} v_j(x)$, $V_j(x) = -\dfrac{1}{2^j} \cdot \dfrac{v_j(x) - M_j}{v_j(x^0) - M_j}$. Кроме того, введём вспомогательную функцию $u_j(x) = A_j(\rho(x) - \delta_{j+1})$, где $A_j > 0$ выбирается так, чтобы $u_j(x) \le -1$ в G_j. Тогда $V_j(x)\Big|_{G_{j+1}} < 0$, $u_j(x)\Big|_{\partial G_{j+1}} \equiv 0$, и определим вспомогательную функцию

$$w_j(x) = \begin{cases} \max\{V_j(x), u_j(x)\}, & x \in G_{j+1}, \\ u_j(x), & x \notin G_{j+1}. \end{cases}$$

Она является $m-cv$ в D $(j = 1,2,\ldots)$ и удовлетворяет $w_j(x) < 0$ в G_{j+1}.

Рассмотрим сумму $w(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j(x)$. Она тоже принадлежит $m-cv(D)$, причём $w(a) = -1$, а $w(x)\Big|_E \equiv -\infty$. Отсюда следует, что множество E является $m-cv$ полярным в D

. Если выбрать последовательность δ_j сходящейся к нулю быстро, например, $\delta_j = \frac{1}{(j!)^2}$, то получится ограниченная функция $w(x) \leq C$ в D.

Теорема 5. *Если* $u(x) \in 1 - cv(D)$, $u(x) \not\equiv -\infty$, *то не существует точки* $x^0 \in D : u(x^0) = -\infty$, *т.е. такая функция нигде не обращается в* $-\infty$.

Доказательство. По теореме 2 предположим противное: что $u(x) \not\equiv -\infty$, но в некоторой точке $x^0 \in D$ функция $u(x)$ принадлежит классу $1 - cv(D)$ и $u(x) \equiv -\infty$. Тогда $u^c(z) = u(x)$ принадлежит классу $sh_1(D)$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, а $u^c(z)$ является плюрисубгармонической функцией. Поскольку $u^c(z) = -\infty$ на вещественном пространстве $\{x^0\} \times \mathbb{R}^n_y$, но эта вещественная n-мерная плоскость не является плюриполярной (см. [14]), то отсюда вытекает, что $u^c(z) \equiv -\infty$. Следовательно, $u(x) \equiv -\infty$ в D, что приводит к противоречию.

Заключение. В данной работе изучены полярные множества в классе m-выпуклых функций. Полученные результаты показывают, что ситуация с $m - cv$ полярными множествами существенно отличается от классических полярных и плюриполярных множеств. В частности, было доказано, что при $m = 1$, т.е. $1 - cv$ полярных множеств не бывает, так как выпуклые функции являются непрерывными. Таким образом, изучение m-выпуклых функций и связанных с ними полярных множеств открывает новые перспективы в анализе выпуклых и субгармонических функций. Дальнейшее исследование в этом направлении может привести к более глубокому пониманию структуры $m - cv$ полярных множеств и их приложений в теории потенциала.

Список использованной литературы:

(1). Aleksandrov A.D. Intrinsic geometry of convex surfaces. OGIZ, Moscow, 1948; German transl., AkademieVerlag, Berlin, 1955.

(2). Aleksandrov A.D. Dirichlet's problem for the equation $\det\left(z_{ij}\right) = \varphi$. Vestnic Leningrad University, 13(1958), p. 5–24.

(3). Bakelman I.J. Variational problems and elliptic Monge-Ampere equations. J. Diff. Geo, 18(1983), p. 669–999.

(4). Bakeman I.J. Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations, Springer-Verlag, 1994.

(5). Blocki Z., Weak solutions to the complex Hessian equation. Ann.Inst. Fourier, Grenoble, V.5, (2005), p. 1735 – 1756.

(6). Chou K.S., Wang X.J. Variational theory for Hessian equations. Comm. Pure Appl. Math., 54(2001), p. 1029–1064.

(7). Dinew S., Kolodziej S. A priori estimates for the complex Hessian equation. Anal. PDE, V.7, (2014), p. 227–244.

(8). Dinew S., Kolodziej S. Non standard properties of m-subharmonic functions. Dolom. Res. Not. Approx. 11, (2018), p. 35–50.

(9). Ivochkina, N.S.Trudinger, X.-J.Wang. The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations. Comm. Partial Difi. Eqns 29 (2004), p. 219–235.

(10). Li S.Y., On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian. Asian J.Math., V.8, (2004), p. 87–106.

(11). Lu C.H., A variational approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$. Journal of Mathematical Analysis and Applications. V. 431:1, (2015), p. 228–259.

(12). Lu H.Ch. Solutions to degenerate Hessian equations. Journal de Mathematique Pures et Appliques. V. 100:6, (2013), p. 785–805.

(13). Садуллаев А., Абдуллаев Б. Теория потенциалов в классе m — субгармонических функций. Труды Математического института имени В.А.Стеклова, Москва, 2012, № 279, с. 166–192.

(14). Садуллаев А. Плюрисубгармонические функции. Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, ВИНИТИ, 1985, т. 8, М., с. 65–113.

(15). Sadullaev A., Definition of Hessians for m-convex functions as Borel measures, Analysis and Applied Mathematics. AAM 2022. Trends in Mathematics, Birkhauser, Cham, 6 (2024), p. 13–19.

(16). Sharipov R.A., Ismoilov M.B. m -convex ($m - cv$) functions. Azerbaijan Journal of Mathematics, V. 13:2, (2023), p. 237–247.

(17). Trudinger N.S. and Wang X.J. Hessian measures I. Topol. Methods Non linear Anal. V.19 (1997), p. 225–239.

(18). Trudinger N.S. and Wang X.J., Hessian measures II. Ann. Math. V.150 (1999), p. 1–23.

(19). Trudinger N.S. and Wang X.J., Hessian measures III. Ann. Math. V.150 (2002), p. 579–604.

(20). Trudinger N.S., Weak solutions of Hessian equations. Comm. Partial Differential Equations 22 (1997), pp. 1251–1261.

Sultanov Bekzod (Associate Professor of the Department of "Algebra and Mathematical Engineering" of Urgench State University; E-mail: sultanov.b@urdu.uz),
Davronbekova Muslima (Student of Urgench State University)

INVARIANTS IN SPECIAL LINEAR TRANSFORMATIONS ON A PLANE

Annotation. *In this article, quantities preserved under special linear transformations are studied. The geometry of a special linear transformation is explored, and it is proven that under this transformation, the product of the semi-axes of curves-such as ellipses, hyperbolas, and special hyperbolas- remains constant.*

Key words*: ellipse; hyperbola; special hyperbola; linear transformation; invariant.*

Sultanov Bekzod (Urganch davlat universiteti "Algebra va matematik injiniring" kafedrasi dotsenti),
Davronbekova Muhlisa (Urganch davlat universiteti talabasi)

TEKISLIKDA MAXSUS CHIZIQLI ALMASHTIRISHDAGI INVARIANTLAR

Annotasiya. *Ushbu maqolada maxsus chiziqli almashtirishda saqlanuvchi kattaliklar o'rganilgan. Maxsus chiziqli almashtirishning geometriyasi o'rganilib, bu almashtirishda ellipslar, giperbolar va maxsus giperbolar kabi egri chiziqlarning yarim o'qlarining ko'paytmasi o'zgarmasligi isbotlangan.*

Kalit so'zlar: *ellips; giperbola, maxsus giperbola, chiziq almashtirish, invariant.*

Султанов Бекзод (доцент кафедры "Алгебра и математическая инженерия" Ургенчского государственного университета),
Давронбекова Муслима (студентка Ургенчского государственного университета)

ИНВАРИАНТЫ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация. *В статье изучаются величины, сохраняющиеся при особых линейных пре-образованиях. Исследуется геометрия специального линейного преобразования и доказано, что при этом преобразовании произведение полуосей кривых, таких как эллипсы, гиперболы и специальные гиперболы, остается постоянным.*

Ключевые слова*. эллипс; гипербола; специальная гипербола; линейная преобразование; инвариант.*

Introduction. The concept of invariant is one of the important concepts in mathematics. An invariant refers to a quantity or algebraic expression related to a line that remains unchanged when a transformation is applied to the line. We consider the operation (motion) involved in the transformation. Invariants are used to solve problems related to lines. When changing the parameter of a line, that is, replacing one parameter with another, invariant quantities remain preserved.

Preliminaries

Let's consider the following linear transformation in the Euclidean plane:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = hx + y + b. \end{cases} \tag{1}$$

This transformation consists of a translation parallel to $\vec{a} = (a,b)$ vector and $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$ matrix transformation [1,2]. Here $DetA = 1$. This A matrix is an element of the Heisenberg group [3,4].

In a (1) linear transformation, let a=b=0. Then:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = hx + y. \end{cases} \qquad 0 \le h < \infty \tag{2}$$