(15). Tuychiev T., Tishabaev J. On the continuation of the Hartogs series with holomorphic coefficients. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2019, Vol. 2, Iss.1, Article 5, pp. 69–76. DOI: https://doi.org/ 10.56017/2181-1318.1021

(16). Садуллаев А.С., Имомкулов С.А. Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на паралельных сечениях. Труды математического института им. В.А.Стеклова, 2006, т. 53, с. 158–174.

(17). Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения Palmarium akademik publishing. Saarbrüchen, Deutschland, 2012.

(18). Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические функции. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., ВИНИТИ, 1985, т. 8, с. 65 – 111.

Яхшимуратов Алишер (университет Мамуна), Матёкубов Оллаберган (УрГУ)

ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА УРАВНЕНИЙ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. *В этой работе получены формулы, выражающие производную по параметру от решений квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля, полагая коэффициенты π -периодическими из полученных формул выведены важные тождества для решений. Кроме того, выведена система уравнений Дубровина, а также приведен пример иллюстрирующий обратную задачу.*

Ключевые слова: *квадратичный пучок уравнений Штурма-Лиувилля, спектральные данные, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

Alisher Yaxshimuratov (Ma'mun universiteti), Ollabergan Matyoqubov (UrDU)

DAVRIY KOEFFITSIYENTLI SHTURM-LIUVILL TENGLAMALARINING KVADRATIK DASTASI UCHUN TESKARI SPEKTRAL MASALA HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu ishda Shturm-Liuvill tenglamalarining kvadrat dastasi yechimlarining parametr bo'yicha hosilasini ifodalovchi formulalar olingan. Koeffitsiyentlarni π -davrli deb hisoblab, olingan formulalardan yechimlar uchun muhim ayniyatlar keltirib chiqarilgan. Bundan tashqari, Dubrovin tenglamalar sistemasi keltirib chiqarilgan va teskari masalani namoyish qiluvchi misol keltirilgan.*

Kalit so'zlar: *Shturm-Liuvill tenglamalarining kvadrat dastasi, spektral berilganlar, teskari spektral masala, Dubrovin tenglamalar sistemasi, izlar formulalari.*

Alisher Yakhshimuratov (Mamun University), Ollabergan Matyokubov (UrSU)

ABOUT THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE QUADRATIC PENCIL OF STURM-LIOUVILLE EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Annotation. *In this paper, formulas expressing the derivative of solutions with respect to parameter of the quadratic pencil of Sturm-Liouville equations are obtained. Assuming that the coefficients are π -periodical, important identities for the solutions from the obtained formulas are deduced. More over, a system of Dubrovin equations is deduced, and an example illustrating the inverse problem is given.*

Keywords: *quadratic pencil of Sturm-Liouville equations, spectral datas, inverse spectral problem, Dubrovin system of equations, trace formulas.*

1. Введение. Обратная задача для квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами на всей прямой исследована в работах Г.Ш.Гусейнова [1,2], Б.А. Бабажанова, А.Б.Хасанова, А.Б.Яхшимуратова [3] и др.

В этой работе получены формулы, выражающие производную по параметру от решений квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля. Полагая коэффициенты π -периодическими из полученных формул выведены важные тождества для решений. В частности, показана не зависимость от параметра спектра квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля с π -периодическими коэффициентами. Кроме того, выведена система уравнений Дубровина, а также приведен пример иллюстрирующий обратную задачу.

2. Основная часть. Рассмотрим квадратичный пучок уравнений Штурма-Лиувилля

$$T(\lambda,\tau)y \equiv -y'' + q(x+\tau)y + 2\lambda\, p(x+\tau)y - \lambda^2 y = 0\,,\ x \in R, \qquad (1)$$

где $p(x), q(x) \in C^1(R)$ действительные функции и τ действительный параметр. Обозначим через $c(x,\lambda,\tau)$ и $s(x,\lambda,\tau)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda,\tau)=1$, $c'(0,\lambda,\tau)=0$ и $s(0,\lambda,\tau)=0$, $s'(0,\lambda,\tau)=1$, соответственно.

Теорема 1. Выполняются следующие тождества:

$$\frac{\partial c(x,\lambda,\tau)}{\partial \tau} = [\lambda^2 - q(\tau) - 2\lambda p(\tau)]s(x,\lambda,\tau) + c'(x,\lambda,\tau), \tag{2}$$

$$\frac{\partial s(x,\lambda,\tau)}{\partial \tau} = s'(x,\lambda,\tau) - c(x,\lambda,\tau), \tag{3}$$

$$\frac{\partial c'(x,\lambda,\tau)}{\partial \tau} = [\lambda^2 - q(\tau) - 2\lambda p(\tau)]s'(x,\lambda,\tau) -$$

$$-[\lambda^2 - q(x+\tau) - 2\lambda p(x+\tau)]c(x,\lambda,\tau), \tag{4}$$

$$\frac{\partial s'(x,\lambda,\tau)}{\partial \tau} = -[\lambda^2 - q(x+\tau) - 2\lambda p(x+\tau)]s(x,\lambda,\tau) - c'(x,\lambda,\tau). \tag{5}$$

Доказательство. Для удобства временно введем обозначения

$$\theta(x) = c(x,\lambda,\tau),\ \varphi(x) = s(x,\lambda,\tau).$$

Дифференцируя тождество $\theta'' - q\theta - 2\lambda p\theta + \lambda^2\theta = 0$ по τ и обозначая $u = \theta_\tau$ имеем $u'' - qu - 2\lambda pu + \lambda^2 u = (q_\tau + 2\lambda p_\tau)\theta$. Кроме того, дифференцируя начальные условия по τ имеем $u(0) = 0, u'(0) = 0$. Решая полученную задачу Коши методом функции Коши, учитывая начальные условия, выводим, что

$$\theta_\tau = \int_0^x [\varphi(x)\theta(z) - \theta(x)\varphi(z)][q_\tau(z+\tau) + 2\lambda p_\tau(z+\tau)]\theta(z)dz.$$

Используя равенства $q_\tau(z+\tau) = q'(z+\tau)$, $p_\tau(z+\tau) = p'(z+\tau)$, и интегрируя по частям, имеем

$$\theta_\tau = \int_0^x [\varphi(x)\theta^2(z) - \theta(x)\theta(z)\varphi(z)]d[q(z+\tau) + 2\lambda p(z+\tau)],$$

$$\theta_\tau = -\varphi(x)[q(\tau) + 2\lambda p(\tau)] +$$

$$+\int_0^x [\theta(x)\varphi'(z) - 2\varphi(x)\theta'(z)]\cdot\theta(z)[q(z+\tau) + 2\lambda p(z+\tau)]dz +$$

$$+\int_0^x \theta(x)\theta'(z)\cdot\varphi(z)[q(z+\tau) + 2\lambda p(z+\tau)]dz.$$

Принимая во внимание, что $\theta(x)$ и $\varphi(x)$ решения квадратичного пучка (1), находим, что

$$\theta_\tau = -\varphi(x)[q(\tau) + 2\lambda p(\tau)] +$$

$$+\int_0^x [\theta(x)\varphi'(z) - 2\varphi(x)\theta'(z)]\cdot[\theta''(z) + \lambda^2\theta(z)]dz +$$

$$+\int_0^x \theta(x)\theta'(z)[\varphi''(z) + \lambda^2\varphi(z)]dz,$$

$$\theta_\tau = -\varphi(x)[q(\tau) + 2\lambda p(\tau)] +$$

$$+\{\theta(x)\theta'(z)\varphi'(z) - \varphi(x)\theta'^2(z) + \lambda^2\theta(x)\theta(z)\varphi(z) - \lambda^2\varphi(x)\theta^2(z)\}\Big|_0^x.$$

Отсюда следует тождество (2). Тождество (3) выводится аналогично. Дифференцируя (2) и (3) по x, получим (4) и (5). Теорема доказана.

Пусть теперь $p(x), q(x) \in C^1(R)$ являются действительными π -периодическими функциями и удовлетворяют условию: для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, удовлетворяющих условиям $y'(0)\overline{y}(0) - y'(\pi)\overline{y}(\pi) = 0$ и $(y,y) = 1$, выполняется неравенство $(py,y)^2 + (qy,y) + (y',y') > 0$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение пространства $L_2(0,\pi)$. Тогда спектр задачи (1) является действительной и совпадает с множеством

$$\sigma(T) = \{\lambda \in R \,|\, -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\} = R \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}),$$

где $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda,\tau) + s'(\pi,\lambda,\tau)$. Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами. Нумерация вводится таким образом, чтобы $\lambda_{-1} < 0 < \lambda_0$. Функция $\Delta(\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для пучка (1).

Введем обозначение $\sigma_n = \sigma_n(\tau) = sign\{s'(\pi,\xi_n,\tau) - c(\pi,\xi_n,\tau)\}$, где $\xi_n = \xi_n(\tau)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ собственные значения задачи Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$ для уравнения (1). Нетрудно видеть, что числа ξ_n совпадают с нулями функции $s(\pi,\lambda,\tau)$ и выполняются включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Граничные точки спектра λ_n и спектральные параметры ξ_n, σ_n называют спектральными данными квадратичного пучка (1). Восстановление коэффициентов p и q по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для квадратичного пучка (1).

Из теоремы 1, в случае π -периодических коэффициентов получим следующие следствия.

Следствие 1. Если в формулах (2) и (5) положим $x = \pi$, и сложим полученные равенства, а также учтем π -периодичность коэффициентов p и q, то выводим, что $\Delta(\lambda)$ не зависит от τ. Отсюда следует независимость от τ спектра квадратичного пучка (1).

Следствие 2. Имеет место равенства

$$\frac{\partial s(\pi,\lambda,\tau)}{\partial \tau} = s'(\pi,\lambda,\tau) - c(\pi,\lambda,\tau), \tag{6}$$

$$\frac{\partial c'(\pi,\lambda,\tau)}{\partial \tau} = [\lambda^2 - q(\tau) - 2\lambda p(\tau)][s'(\pi,\lambda,\tau) - c(\pi,\lambda,\tau)], \tag{7}$$

$$\frac{\partial [s'(\pi,\lambda,\tau) - c(\pi,\lambda,\tau)]}{\partial \tau} = -2[\lambda^2 - q(\tau) - 2\lambda p(\tau)]s(\pi,\lambda,\tau) - 2c'(\pi,\lambda,\tau). \tag{8}$$

Используя формулы (6), (7), (8) и разложение

$$s(\pi,\lambda,\tau) = \pi \prod_{0 \ne k = -\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{k} \tag{9}$$

можно доказать следующую лемму (см. [4], стр. 79-82).

Лемма 1. 1) если ξ_n не зависит от τ, то $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$;

2) если $\left.\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = 0$, то при $\tau = \tau_0$ выполняется $\xi_n = \lambda_{2n-1}$ или $\xi_n = \lambda_{2n}$;

3) если $\lambda_{2n-1} < \lambda_{2n}$, то ξ_n при изменении $\tau \in R$ заметает всю лакуну $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Из формулы (9) получим равенство

$$\left.\frac{\partial s(\pi,\lambda,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\lambda=\xi_n} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} \cdot \prod_{k \ne n,0} \frac{\xi_k - \xi_n}{k}.$$

Подставляя это в (6) имеем

$$\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}\cdot\prod_{k\neq n,0}\frac{\xi_k-\xi_n}{k}=s'(\pi,\xi_n,\tau)-c(\pi,\xi_n,\tau). \qquad (10)$$

Из тождества

$$[s'(\pi,\lambda,\tau)-c(\pi,\lambda,\tau)]^2=(\Delta^2(\lambda)-4)-4c'(\pi,\lambda,\tau)s(\pi,\lambda,\tau)$$

следует, что

$$s'(\pi,\xi_n,\tau)-c(\pi,\xi_n,\tau)=\sigma_n\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}\,. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) выводим систему уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}=\frac{\sigma_n\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}}{\frac{\pi}{n}\cdot\prod_{k\neq n,0}\frac{\xi_k-\xi_n}{k}},\ n\in Z\setminus\{0\}. \qquad (12)$$

Используя разложение

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2(\lambda-\lambda_{-1})(\lambda-\lambda_0)\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{k^2}$$

и равенство

$$sign\left\{\frac{\pi}{n}\prod_{k\neq n,0}\frac{\xi_k-\xi_n}{k}\right\}=(-1)^{n-1}sign(n)$$

систему уравнений Дубровина (12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}=2(-1)^{n-1}sign(n)\cdot\sigma_n\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot h_n(\xi),\ \ n\in Z\setminus\{0\}, \qquad (13)$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{-1})(\xi_n-\lambda_0)\prod_{k\neq n,0}\frac{(\xi_n-\lambda_{2k-1})(\xi_n-\lambda_{2k})}{(\xi_n-\xi_k)^2}},$$

$$\xi=(\ldots,\xi_{-1},\xi_1,\ldots).$$

Отметим, что в работе [3] система Дубровина выведена другим способом. Здесь мы вывели систему Дубровина, опираясь на идеи Б.М.Левитана для конечнозонных потенциалов.

Система уравнений Дубровина и следующие формулы первого и второго следов

$$p(\tau,t)=\frac{\lambda_{-1}+\lambda_0}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k\right), \qquad (14)$$

$$q(\tau,t)+2p^2(\tau,t)=\frac{(\lambda_{-1})^2+(\lambda_0)^2}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_{2k-1})^2+(\lambda_{2k})^2}{2}-\xi_k^2\right) \qquad (15)$$

дают метод решения обратной задачи.

Пример 1. Пусть имеются только две непустые лакуны (λ_{-1},λ_0) и (λ_1,λ_2), где $\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$, и спектральные параметры $\xi_1(0)=\lambda_1$, $\sigma_1(0)=+1$. Тогда система (13) и формулы следов (14) и (15) примут вид

$$\frac{d\xi_1}{d\tau}=2\sqrt{(\lambda_2-\xi_1)(\xi_1-\lambda_1)(\xi_1-\lambda_{-1})(\xi_1-\lambda_0)}\,, \qquad (16)$$

$$p(\tau)=\frac{\lambda_{-1}+\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2}{2}-\xi_1(\tau), \qquad (17)$$

$$q(\tau)+2p^2(\tau)=\frac{\lambda_{-1}^2+\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2}{2}-\xi_1^2(\tau)\,. \qquad (18)$$

Используя начальные условия и $\xi_1=\xi_1(\tau)\in[\lambda_1,\lambda_2]$, из (16) получим, что

$$\int_{\lambda_1}^{\xi_1}\frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-x)(x-\lambda_1)(x-\lambda_{-1})(x-\lambda_0)}}dx=2\tau\,.$$

Если сделать замену переменных $z=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x-\lambda_1}{x-\lambda_0}}$, $a=\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_0}}$, $0<a<1$, то последнее уравнение выглядит следующим образом

$$\int_0^{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\xi_1-\lambda_1}{\xi_1-\lambda_0}}}\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz=\tau\sqrt{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_1-\lambda_{-1})}\,,$$

где $k=\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_{-1})}{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_1-\lambda_{-1})}}$, $0<k<1$. Из определения эллиптической синус-функции Якоби, отсюда следует, что

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\xi_1-\lambda_1}{\xi_1-\lambda_0}}=sn(\tau\sqrt{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_1-\lambda_{-1})},k)\,.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$\xi_1=\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)-\lambda_0(\lambda_2-\lambda_1)sn^2(\tau\sqrt{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_1-\lambda_{-1})},k)}{\lambda_2-\lambda_0-(\lambda_2-\lambda_1)sn^2(\tau\sqrt{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_1-\lambda_{-1})},k)}\,.$$

Из формул следов (17), (18) находим $p(x)$ и $q(x)$.

3. Заключение. В этой работе получены формулы, выражающие производную по параметру от решений квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля. Полагая коэффициенты π-периодическими из полученных формул выведены важные тождества для решений. В частности, показана независимость от параметра спектра квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля с π-периодическими коэффициентами. Кроме того, выведена система уравнений Дубровина, а также приведен пример иллюстрирующий обратную задачу.

Список использованной литературы:

(1). Гусейнов Г.Ш. О квадратичном пучке операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами. "Вестн. Моск. ун-та", сер. 1, мат., мех., 1984, № 3, с. 14–21.

(2). Гусейнов Г.Ш. Спектр и разложения по собственным функциям квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами. Сб. Спектральная теория операторов и ее приложения, вып. 6, 1985, изд-во «Элм», Баку, с. 56–97.

(3). Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом. Дифференциальные уравнения, 2005, т. 41:3, с. 298–305.

(4). Hasanov A.B. Xill tenglamasi uchun teskari masalalar va ularning tatbiqlari. Toshkent, «Turon-Iqbol», 2013, 424 bet.