эффициентам $p(x,t)$ и $q(x,t)$ совпадает с $\Delta(\lambda)$, то по обратной теореме Борга (см. [12]), число $\frac{\pi}{2}$ является также периодом и для решения $u(x,t)$ по переменной x.

Заключение. В данной работе исследовано решение задачи Коши для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в классе периодических функций. Проведен анализ существования и единственности решений, а также их поведения со временем. Установлено влияние источника на динамику формирования периодических волн и устойчивость решений. Полученные результаты расширяют понимание процессов, описываемых мНКдФ-уравнением с источником, и могут быть использованы в моделировании сложных физических явлений, таких как волновые процессы в плазме и гидродинамике.

Список использованной литературы:

(1). Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. J.Phys. Soc. Japan, 1972, v. 32, pp. 1681.

(2). Итс А.Р. Точное интегрирование в римановых θ-функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л., ЛГУ, 1977.

(3). Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Мат. сб., 1994, т. 185, № 8, с. 103–114.

(4). Melnikov V.K. Exact solutions of the Kortewed-de Vries equation with a self-consistent source. Phys. ett. A, 1988, v. 128, pp. 488–492.

(5). Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником. "Узб. матем. журнал", 2003, № 1, с. 69–75.

(6). Grinevich, P.G., Taimanov, I.A. Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 224, p. 125–138 (2008).

(7). Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. «Теорет. и матем. физика», 2010, т. 164, № 2, с. 214–221.

(8). Alisher Yakhshimuratov. The Nonlinear Schrödinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, (2011), 14, pp. 153–169.

(9). Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М., "Наука", 1988.

(10). Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1978, вып. 30, с. 90–101.

(11). Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом. "Узб. мат. журнал", 2001, № 3–4, с. 48–55.

(12). Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака. "Узб. мат. журнал", 2000, № 3, с. 40–46.

(13). Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials. Proceedings of the Edinburgh mathematical society, 2017, v. 60, p. 615–633.

Икрамов Ахмат Маорипович (Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека; ikramovaxmat@gmail.com)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛАХ

Аннотация. *В статье приводится математическая и вариационная постановка, вычислительный алгоритм и программное обеспечение решения трёхмерных стационарных задач теплопроводности. Исследуемая область трехмерного тела разбивается на линейные конечные элементы в форме тетраэдра с четырьмя узлами в углах. Рассматривается задача о влиянии включения из меди или изолированной полости в форме куба. Изучено влияние неоднородностей на распределение поля температуры в конструкции. Установлено, что наличии медного включения в центре конструкции, понижает температуру в верхней части тела, а в нижней - увеличивает. Наличие изолированной полости концентрирует тепло в окрестности, расположенной над полостью. Результаты вычислительных экспериментов для однородных классических тел соответствуют аналитическим решениям и численным решениям, полученным методом конечных разностей.*

Ключевые слова: *теплопроводность, стационарность, конечный элемент, узел, полость, включение.*

Ikramov Axmat Maoripovich (Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, O'zbekiston; ikramovaxmat@gmail.com)

BIR JINSLI BO'LMAGAN JISMLARDA STATSIONAR ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK JARAYONINI MODELLASHTIRISH

Annotatsiya. *Maqolada uch o'lchovli statsionar issiqlik o'tkazuvchanligi masalalarini yechish uchun matematik va variatsion formulalar, hisoblash algoritmi va dasturiy ta'minoti keltirilgan. Uch o'lchovli jism burchaklarida to'rtta tugunli tetraedr shaklidagi chiziqli chekli elementlarga bo'linadi. Mis qo'shilishi yoki kub shaklida izolyatsiya qilingan bo'shliqning ta'siri masalasi ko'rib chiqiladi. Tuzilmadagi harorat maydonining taqsimlanishiga notekisliklarning ta'siri o'rganildi. Tuzilmaning markazida mis qo'shimchasi mavjudligi jismning yuqori qismida haroratni pasaytiradi va pastki qismida uni ko'payishi aniqlandi. Izolatsiya qilingan bo'shliqning mavjudligi issiqlikni bo'shliq ustidagi atrofida to'playdi. Bir jinsli klassik jismlar uchun hisoblash tajribalari natijalari analitik yechimlarga va chekli ayirma usulida olingan sonli yechimlarga mos keladi.*

Kalit so'zlar*: issiqlik o'tkazuvchanlik, statsionarlik, chekli element, tugun, bo'shliq, qo'shimcha.*

Ikramov Akhmat Maoripovich (National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek; ikramovaxmat@gmail.com)

SIMULATION OF STATIONARY HEAT CONDUCTIVITY PROCESS FOR INHOMOGENEOUS BODIES

Annotation. *The article presents a mathematical and variational formulation, with a computational algorithm and software, designed to solve three-dimensional stationary heat conduction problems. It focuses on a three-dimensional body, divided into linear finite elements shaped like tetrahedra, each with four corner nodes. The study examines the effects of a copper inclusion or an isolated cubic cavity within the structure and investigates how these inhomogeneities influence the temperature field distribution. The findings reveal that the presence of a copper inclusion at the center of the structure decreases the temperature in the upper part while increasing it in the lower part. Additionally, an isolated cavity creates a concentration of heat in the area above it. The results from computational experiments conducted on homogeneous classical bodies align well with analytical and numerical solutions derived from the finite difference method.*

Keywords: *thermal conductivity, stationarity, heterogeneity, finite element, node, cavity, inclusion.*

Введение. Процесс теплообмена играет ключевую роль в развитии множества высокотехнологичных отраслей, таких как авиация, атомная энергетика и ракетно-космическая техника. С развитием этих технологий возникает необходимость решения более сложных и специфичных задач теплообмена, что, в свою очередь, стимулирует прогресс в исследовательских и прикладных аспектах теплотехники.

С развитием вычислительных технологий и методов численного моделирования значительно расширились возможности в исследовании тепловых процессов. Численное моделирование позволяет точно и эффективно анализировать сложные явления теплообмена, которые невозможно решить с помощью аналитических методов из-за их сложности. Это включает как прикладные задачи, так и теоретические исследования, где требуется глубокое понимание механизмов теплообмена в условиях, выходящих за рамки классических моделей.

Теоретические исследования процессов теплообмена в значительной степени зависят от методов численного моделирования. Современные подходы используют вычислительные методы, такие как метод конечных элементов, метод конечных разностей и другие, что позволяет проводить надежные прогнозы поведения тепловых процессов в различных технических системах [1-3]. Особое внимание уделяется созданию моделей, позволяющие разрабатывать новые, что особенно важно для высокотехнологичных отраслей, где необходимы точность и надежность прогнозов [4, 5].

Постановка задачи. Для процесса теплопроводности в однородном твёрдом теле, занимающем трёхмерную область в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z), уравнение краевой задачи стационарной теплопроводности выражается следующим образом [1;4 с.]:

$$K_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+K_{zz}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+Q=0 \qquad (1)$$

где

$T = T(x, y, z)$ - температура в каждой точке области, занимаемой телом Ω.

K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} –коэффициенты теплопроводности материала, которые могут быть разные в каждом из направлений осей Ox, Oy и Oz, отражающие неоднородность материала по направлениям; $Q = Q(x, y, z)$ - мощность теплоисточников внутри тела.

Для частного решения задачи (1) должны быть заданы граничные условия:

на части поверхности S_1 тела Ω задана температура T_{s_1}:

$$T_{s_1} = T(x, y, z), \quad x, y, z \in S_1 \tag{2}$$

на части поверхности S_2 тела Ω задан тепловой поток плотностью q:

$$K_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\ell_x + K_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\ell_y + K_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\ell_z = -q \tag{3}$$

где ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S_2, тепловой поток положителен, если тепло отводится от тела. Если поверхность S_2 изолирована, то $q = 0$;

- на части поверхности S_3 тела Ω происходит конвективный теплообмен:

$$K_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\ell_x + K_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\ell_y + K_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\ell_z = -h(T_s - T_b), \tag{4}$$

где

T_s - температура поверхности S_3, T_b – температура внешней среды, h - коэффициент теплоотдачи, $q_h = h(T_s - T_b)$ – плотность теплового потока, отводимого с поверхности тела из-за конвекции.

С вариационной точки зрения решение уравнения (1) с граничными условиями (2) - (4) эквивалентно отысканию минимума функционала [1,4]

$$\chi = \int_V \frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + K_{yy}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + K_{zz}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 - 2QT\right] + \int_{S_2} qT dS + \int_{S_3}\frac{h}{2}(T - T_b)^2 dS\,. \tag{5}$$

Метод решения. Используем функционал (5) для обоснования МКЭ применительно к трёхмерной задаче теплопроводности. Разобьём область тела на *m* конечных элементов, создав при этом n узлов. Степенями свободы будут температуры узлов. Они образуют общий (глобальный) вектор степеней свободы (узловых температур): $\{T\}^T = \{T_1 \ \cdots \ T_n\}$.

Рассмотрим в качестве примера тетраэдральный конечный элемент с четырьмя узлами (рис. 1). На одной из его плоскостей *jkl* имеется тепловой поток плотностью *q*, на другой плоскости *ijl* происходит конвективная теплопередача q_h, внутри действуют теплоисточники с мощностью Q. Степенями свободы элемента являются узловые температуры, образующие вектор $\{T\}_e^T = \{T_i \ T_j \ T_k \ T_l\}_e$. Узловые тепловые нагрузки элемента образуют вектор $\{Q\}_e^T = \{Q_i \ Q_j \ Q_k \ Q_l\}_e$.

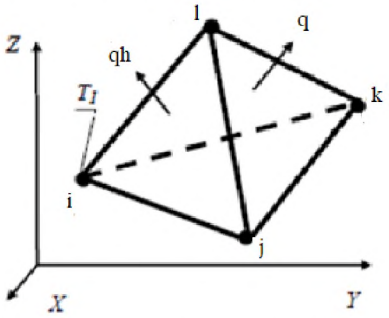


Рис. 1. Тетраэдральный конечный элемент

Температура в конечном элементе:

$$\{T(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]_e \{T\}_e \tag{6}$$

где

$$[N(x, y, z)]_e = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l]_e, \tag{7}$$

$$N_i = \frac{1}{6V_e}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z), \qquad N_j = \frac{1}{6V_e}(a_j + b_j x + c_j y + d_j z),$$

$$N_k = \frac{1}{6V_e}(a_k + b_k x + c_k y + d_k z), \quad N_l = \frac{1}{6V_e}(a_l + b_l x + c_l y + d_l z)$$

$$a_i = \det\begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix};\ b_i = -\det\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix};\ c_i = -\det\begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix};\ d_i = -\det\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix};$$

$$a_j = -\det\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix};\ b_j = \det\begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix};\ c_j = -\det\begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix};\ d_j = \det\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix};$$

$$a_k = \det\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix};\ b_k = -\det\begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix};\ c_k = \det\begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix};\ d_k = -\det\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix};$$

$$a_l = -\det\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix};\ b_l = \det\begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \end{vmatrix};\ c_l = -\det\begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix};\ d_l = \det\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix};$$

$6V_e = \det\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$ – шесть объёмов тетраэдра.

Введём две элементные матрицы: матрица коэффициентов теплопроводности:

$$[D]_e = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}_e \tag{8}$$

и матрица градиентов температуры:

$$\{g\}_e = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix}_e = [B]_e \{T\}_e, \tag{9}$$

где

$$[B]_e = \frac{1}{6V_e}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix}_e. \tag{10}$$

Разобьём интеграл (5) по элементам, с учётом выражений (7)-(10):

$$\chi = \sum_{e=1}^{m} \chi_e = \sum \left[\int_{V_e} \frac{1}{2} \{T\}^T [B]_e^T [D]_e [B]_e \{T\} dV - \int_{V_e} Q [N]_e \{T\} dV \right] +$$
$$+ \sum_{e=1}^{m} \left[\int_{S_{2e}} q [N]_e \{T\} dS + \int_{S_{3e}} \frac{h}{2} \{T\}^T [N]_e^T [N]_e \{T\} dS - \int_{S_{3e}} h T_b [N]_e \{T\} dS + \int_{S_{3e}} \frac{h}{2} T_b^2 dS \right] \quad (11)$$

Минимизируя функционал (11) на множестве узловых значений температурного поля $\{T\}$, получим систему уравнений

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^{m} \chi_e = \sum_{e=1}^{m} \frac{\partial \chi_e}{\partial \{T\}} = 0 \quad (12)$$

$$\chi^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{T\}^T \left[B^{(e)}\right]^T \left[D^{(e)}\right] \left[B^{(e)}\right] \{T\} dV - \int_{V^{(e)}} Q \left[N^{(e)}\right] \{T\} dV + \int_{S_1^{(e)}} q \left[N^{(e)}\right] \{T\} dS +$$
$$+ \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \{T\}^T \left[N^{(e)}\right]^T \left[N^{(e)}\right] \{T\} dS - \int_{S_2^{(e)}} h T_b \left[N^{(e)}\right] \{T\} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} T_b^2 dS \quad (13)$$

Величины Q, q, T_b и h – известные коэффициенты. Они внесены под знак интеграла, потому что могут изменяться внутри элемента. Дифференцирование величины (13) по $\{T\}$ представляет собой совершенно простую операцию.

Рассмотрим выражения (13):

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{T\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV,$$
$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{T\} dV = \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV,$$
$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}] \{T\} dS = \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS,$$
$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_1^{(e)}} \frac{h}{2} \{T\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{T\} dS = \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{T\} dS, \quad (14)$$
$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_2^{(e)}} h T_b [N^{(e)}] \{T\} dS = \int_{S_2^{(e)}} h T_b [N^{(e)}]^T dS,$$
$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} T_b^2 = 0.$$

Вклад отдельного конечного элемента $\partial \chi^{(e)} / \partial \{T\}$ в общую сумму в $\partial \chi / \partial \{T\}$ равен:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}} = \left(\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \right) \{T\} -$$
$$- \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV + \int_{S_2^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2^{(e)}} h T_b [N^{(e)}]^T dS. \quad (15)$$

Эта совокупность интегралов может быть записана в компактной форме:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}} = [k^{(e)}] \{T\} + \{f^{(e)}\} \quad (16)$$

где

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \quad (17)$$

и

$$\{f^{(e)}\} = -\int_{V^{(e)}} Q[N^{(e)}]^T dV + \int_{S_1^{(e)}} q[N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2^{(e)}} hT_b[N^{(e)}]^T dS \qquad (18)$$

Окончательная система уравнений получается после подстановки выражения (16) в (12):

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^{E} \left([k^{(e)}]\{T\} + \{f^{(e)}\} \right) = 0, \qquad (19)$$

или

$$[K]\{T\} = \{F\}, \qquad (20)$$

где

$$[K] = \sum_{e=1}^{E} [k^{(e)}] \qquad (21)$$

и

$$\{F\} = -\sum_{e=1}^{E} \{f^{(e)}\} \qquad (22)$$

Таким образом, интегралы в (17) определяют матрицу теплопроводности конечного элемента $[k^{(e)}]$, а интегралы в (18) - вектор нагрузки конечного элемента $\{f^{(e)}\}$.

Алгоритм решения. Рассматривается решение трехмерной стационарной задачи теплопроводности и разработан алгоритм решения задачи на основе МКЭ [4].

С учетом транспонирования матрицы (10) и формулы (8), первое слагаемое в формуле (17) принимает вид:

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = \int_V \frac{1}{36V^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i & d_i \\ b_j & c_j & d_j \\ b_k & c_k & d_k \\ b_l & c_l & d_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix} dV. \qquad (23)$$

Подынтегральное выражение в (23) постоянно и может быть вынесено за знак интеграла:

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = [B]^T [D][B] \int_V dV = V[B]^T [D][B]. \qquad (24)$$

После вычисления произведения матриц первый интеграл в формуле (17) имеет вид:

$$[k^{(e)}] = \frac{K_{xx}}{36V} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k & b_i b_l \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k & b_j b_l \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k & b_k b_l \\ b_l b_i & b_l b_j & b_l b_k & b_l b_l \end{bmatrix} +$$

$$\frac{K_{yy}}{36V} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k & c_i c_l \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k & c_j c_l \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k & c_k c_l \\ c_l c_i & c_l c_j & c_l c_k & c_l c_l \end{bmatrix} + \frac{K_{zz}}{36V} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_k & d_i d_l \\ d_j d_i & d_j d_j & d_j d_k & d_j d_l \\ d_k d_i & d_k d_j & d_k d_k & d_k d_l \\ d_l d_i & d_l d_j & d_l d_k & d_l d_l \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Второй интеграл в (17), $\int_S h[N]^T [N] dS$ должен быть вычислен по поверхности. Подставляя в матрицу [N] функции формы и выполняя матричное умножение, получаем

$$\int_S h[N]^T[N]dS = h\int_S \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k & N_iN_l \\ N_jN_i & N_jN_j & N_jN_k & N_jN_l \\ N_kN_i & N_kN_j & N_kN_k & N_kN_l \\ N_lN_i & N_lN_j & N_lN_k & N_lN_l \end{bmatrix} dS . \quad (26)$$

Функции формы зависят от *x, y* и *z*, поэтому произведения вида N_iN_j не могут быть вынесены за знак интеграла. Кроме того, значение интеграла зависит от того, на какой поверхности наблюдается конвективный теплообмен. Если, например, конвекции подвержена поверхность между узлами i, j и k (рис. 1), то N_l равно нулю по этой поверхности и интеграл сводится к следующему выражению:

$$\int_S h[N]^T[N]dS = h\int_S \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k & 0 \\ N_jN_i & N_jN_j & N_jN_k & 0 \\ N_kN_i & N_kN_j & N_kN_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dS . \quad (27)$$

Если любая из трех других поверхностей подвержена конвекции, то расположение отличных от нуля членов в (26) будет иным, чем в (27).

Вычисление произведений в (26) упрощается, если применить объёмные L-координаты и интегральные формулы (29) – (30), приведенные ниже [4]. Предполагая, что измеряем от стороны, противоположной *i*-му узлу, можно записать: $L_1 = N_i$, $L_2 = N_j$, $L_3 = N_k$ и $L_4 = N_l$.

Если предположить, что конвективный теплообмен имеет место на поверхности элемента между узлами i, j и k, то в точках этой поверхности $L_4 = N_l = 0$ и соотношение (27) примет вид

$$\int_S h[N]^T[N]dS = h\int_{S_{ijk}} \begin{bmatrix} L_1L_1 & L_1L_2 & L_1L_3 & 0 \\ L_2L_1 & L_2L_2 & L_2L_3 & 0 \\ L_3L_1 & L_3L_2 & L_3L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dS . \quad (28)$$

Два типа произведений входят в формулу (28): квадрат величины L_1^2, L_2^2 или L_3^2 и перекрестное произведение L_1L_2, L_1L_3 и L_2L_3.

Начиная с квадратных членов, получают запись:

$$\int_{S_{ijk}} L_1^2 dS = \int_{S_{ijk}} L_1^2L_2^0L_3^0 dS = \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!}2S_{ijk} = \frac{2S_{ijk}}{12}, \quad (29)$$

где S_{ijk} - площадь поверхности между узлами *ijk*. Интегрирование перекрестного произведения дает:

$$\int_{S_{ijk}} L_1L_2 dS = \int_{S_{ijk}} L_1^1L_2^1L_3^0 dS = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!}2S_{ijk} = \frac{S_{ijk}}{12}. \quad (30)$$

Интегралы $\int_{S_{ijk}} L_1^2 dS$, $\int_{S_{ijk}} L_2^2 dS$ и $\int_{S_{ijk}} L_3^2 dS$ равны между собой. Подстановка полученных результатов в формулу (28) приводит к записи:

$$h\int_{S_{ijk}} [N]^T[N]dS = \frac{hS_{ijk}}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Аналогичные соотношения получаются для поверхности между узлами *jkl*:

$$h\int_{S_{jkl}}[N]^T[N]dS=\frac{hS_{jkl}}{12}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&1\\0&1&2&1\\0&1&1&2\end{bmatrix} \tag{32}$$

и для поверхности между узлами *ijl*:

$$h\int_{S_{ijl}}[N]^T[N]dS=\frac{hS_{ijl}}{12}\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&2\end{bmatrix}. \tag{33}$$

а также поверхности между узлами *ikl*:

$$h\int_{S_{ikl}}[N]^T[N]dS=\frac{hS_{ikl}}{12}\begin{bmatrix}2&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&2&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}. \tag{34}$$

Три интеграла в выражении для вектора нагрузки элемента вычисляются, если воспользоваться объёмными L-координатами. Как показано в работе [4], для интеграла $\int_V [N]^T QdV$, предполагается, что величина Q постоянна внутри элемента, тогда будем иметь:

$$Q\int_V[N]^T dV=Q\int_V\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{bmatrix}dV=\frac{QV}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}. \tag{35}$$

Таким образом, тепло, генерируемое в элементе, распределяется поровну по четырем узлам. Интегралы $\int_{S_1}[N]^T qdS$ и $\int_{S_2}[N]^T hT_\infty dS$ записываются в одинаковой форме:

$$\int_S\begin{bmatrix}N_i\\N_j\\N_k\\N_l\end{bmatrix}dS, \tag{36}$$

так что только один из них необходимо вычислить. Поскольку интеграл (36) поверхностный, его можно рассмотреть так же, как интеграл (35). Результаты зависят от того, на какой из поверхности элемента происходит конвективный теплообмен, характеризуемый величиной h, или приток тепла за счет теплового потока q. Предполагая q постоянным по поверхности элемента, имеем для интеграла четыре следующие формы записи:

$$q\int_S[N]^T dS=\begin{cases}\frac{qS_{ijk}}{3}\{1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\}^T\\ \frac{qS_{ijl}}{3}\{1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\}^T\\ \frac{qS_{ikl}}{3}\{1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\}^T\\ \frac{qS_{jkl}}{3}\{0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\}^T\end{cases}. \tag{37}$$

Величина $hT_b\int_S[N]^T dS$ идентична (37) с учетом замены q на hT_b.

Если тепловой поток или конвективный теплообмен наблюдаются на трех поверхностях элемента, то поверхностный интеграл заменяют суммой интегралов по каждой из поверхностей. То же самое относится к интегралу (37).

В большинстве задач о переносе тепла интерес представляют значения температуры в узловых точках. Иногда бывает необходимо определять градиенты температуры. После того как определены узловые значения, градиенты температуры определяется с помощью соотношения

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_l \end{Bmatrix}, \qquad (38)$$

Вычислительный эксперимент и обсуждение результатов. Рассматривается трехмерная стационарная задача о распределении тепла в единичном кубе (рис. 2), грани которого имеют постоянную температуру, причем одна грань имеет температуру 100°С, а пять других - 0°С. Теплофизические характеристики конструкции:

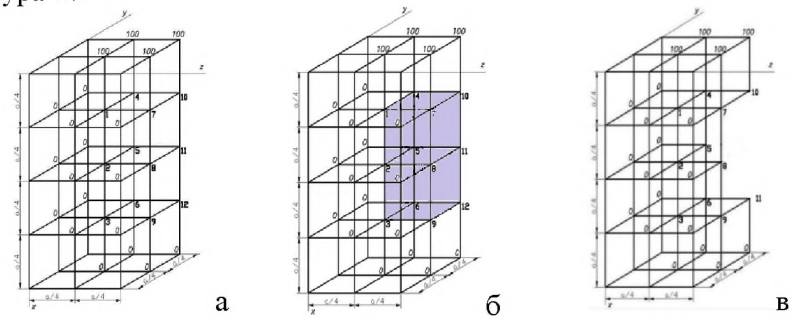
сталь: $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = 46\,\text{кВт}/(\text{м}\cdot\text{град.})$, $\rho = 7800\,\text{кг}/\text{м}^3$, $c = 460\,\text{Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{град.})$;

медь: $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = 384\,\text{кВт}/(\text{м}\cdot\text{град.})$, $\rho = 8800\,\text{кг}/\text{м}^3$, $c = 381\,\text{Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{град.})$.

Рассматриваемая задача имеет конечно-разностное [5] и аналитическое решения в виде бесконечного сходящегося ряда [7]:

$$T = \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{100sh[l(a-x)]\sin[(2p+1)\pi y/a]\sin[(2p+1)\pi z/a]}{(2p+1)(2q+1)sh(la)}$$

где $l^2 = \frac{(2p+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{(2q+1)^2\pi^2}{a^2}$; a – ребро куба; x, y, z – координаты точки, для которых находится температура T.



а б в

Рис. 2. ¼ часть пространственной сетки куба.

Значения температуры для узлов сетки, пронумерованных, как показано на рис. 2 (наклонным шрифтом показаны граничные условия, прямым – номера узлов), сведены в табл. 1. Представлены аналитическое решение [7], по методу конечных разностей (МКР) [5], а также несколько вариантов расчета, в которых сгущается конечно элементная сетка.

Табл.1. Значения температур в узлах сетки (°С).

№ узла	аналитическое решения	МКР	МКЭ		
			число конечных элементов		
			16	128	1024
10	45.81	43.6	42.31	44.72	45.48
11	16.67	16.7	15.83	16.47	16.60
12	5.10	5.5	5.05	5.12	5.10

Из приведенных в контрольных точках значений можно констатировать близость результатов решения к аналитическому, причем с увеличением густоты сетки точность решений повышается.

Далее исследуется описанная выше задача, для неоднородной стальной конструкции, которая характеризуется наличием в центре медного включения или изолированной полости в форме куба, размером – 0.5 м. В табл. 2. приведены значения температуры тела в контрольных точках конструкции при наличии 1024 конечных элементов [6;10 с.]. Установлено, что наличие медного включения

уменьшает значения температуры в верхней части конструкции, а в нижней части – увеличивается (рис. 3 и 4. а, б).

Табл. 2. Значения температур в узлах сетки (°С).

№ узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
сталь	30.2	8.9	2.6	37.0	12.1	3.6	37.0	12.1	3.6	45.5	16.6	5.1
сталь/ медь	24.0	14.0	8.9	24.5	15.6	10.9	24.5	15.6	10.9	24.1	16.6	12.4
сталь/по лость	31.9	5.3	0.8	43.2	6.5	0.8	43.2	6.5	0.8	73.0	-	0.3

При наличии изолированной полости в центре конструкции тепловой поток концентрируется в верхней части тела (рис.4.в).

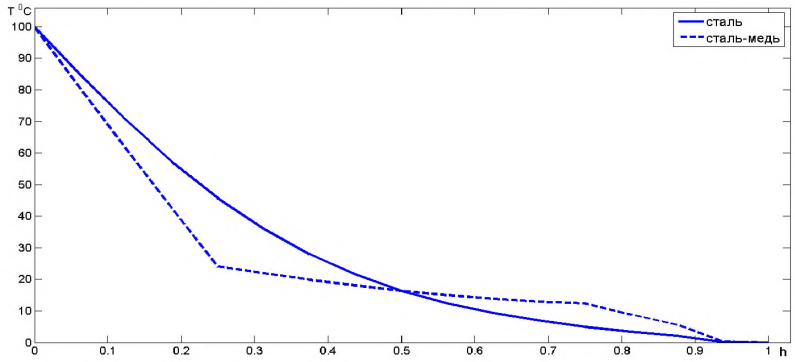
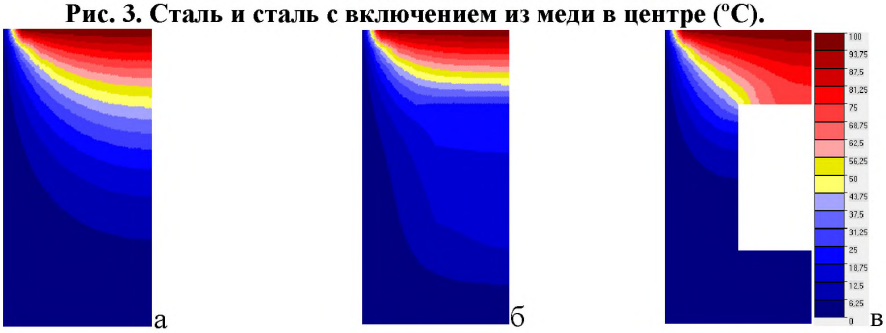


Рис. 3. Сталь и сталь с включением из меди в центре (°С).



а б в

сталь сталь/медь сталь/ полость

Рис. 4. Распределение изотермы температуры в ¼ части куба (°С).

Заключение. В статье разработан вычислительный алгоритм и программный комплекс решения стационарной задачи теплопроводности МКЭ. Посредством вычислительного эксперимента показана численная сходимость к точному решению. Далее исследуется неоднородная стальная конструкция, в центре которой имеется включения из меди или изолированная полости в форме куба. Установлено, что наличии медного включения в центре конструкции, понижает температуру в верхней части тела, а в нижней части – увеличивает. Наличие изолированной полости концентрирует тепло в окрестности над полостью.

Список использованной литературы:

[1]. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М., “Мир”, 1975, 542 с.

[2]. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964, 488 с.

[3]. Пыхалов А.А., Милов А.Е. Контактная задача статического и динамического анализа сборных роторов турбомашин. Иркутск, ИрГТУ, 2007, 192 с.

[4]. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М., “Мир”, 1979, 392 с.

[5]. Юдаев Б.Н. Теплопередача. М.: Высшая. школа, 1981. -319 с.

[6]. Polatov, A., Ikramov, A., Jumaniyozov, S., Sapayev, S. Computer Simulation of Two-Dimensional Unsteady-State Heat Conduction Problems for Inhomogeneous Bodies by the FEM. AIP Conference Proceedings, 2023, 2781, 020019.

[7]. Ikramov, A.M., Polatov, A.M. Finite Element Modeling of Nonstationary Problems of Heat Conduction under Complex Heat Transfer. Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, 2023, 45, pp. 104–120.

[8]. Ikramov, A., Polatov, A., Pulatov, S., Zhumaniyozov, S. Computer Simulation of Two-Dimensional Nonstationary Problems of Heat Conduction for Composite Materials Using the FEM. AIP Conference Proceedings, 2022, 2637, 040006.

[9]. Polatov, A.M., Ikramov, A.M., Razmukhamedov, D.D. Finite element modeling of multiplyconnected three-dimensional areas. Advances in Computational Design, 2020, 5(3), pp. 277–289.

[10]. Polatov, A., Gaynazarov, S., Ikramov, A., Jumaniyozov, S. Algorithms for Constructing a Finite Element Mesh of Compound Domains. AIP Conference Proceedings, 2024, 3004(1), 060016.

Muxtarov Erkinjon Kobiljonovich (Andijon davlat universiteti "Umumiy fizika" kafedarasi dotsenti; e-mail: erkinmuxtarov@yahoo.com)

KUKUNLI TEXNOLOGIYA ORQALI OLINGAN POLIKRISTALL KREMNIYNING FURYE-IQ SPEKTROSKOPIYASI

Annotatsiya. *Maqolada kukunli texnoligiya asosida olingan polikristall kremniyning strukturaviy xususiyatlarini aniqlash va elektr xususiyatlariga ta'sir etuvchi nuqsonlar va xususiyatlarni aniqlash uchun Furye infraqizil spektroskopiyasidan foydalanish ko'rib chiqiladi.*

Kalit so'zlar: *tebranishlar, kremniy, nurlanish, kristall, to'lqin soni, elektr o'tkazuvchanlik, spektr.*

Мухтаров Эркинжон Кобилжонович (Андижанский государственный университет, доцент; e-mail: erkinmuxtarov@yahoo.com)

ФУРЬЕ-ИК СПЕКТРОСКОПИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО ПО ПОРОШКОВОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Аннотация. *В статье рассматривается применение Фурье-ИК спектроскопии для анализа поликристаллического кремния, полученного методом порошковой металлургии, с целью выявления его структурных характеристик и выявления потенциальных дефектов и особенностей, влияющих на его электрофизические свойства.*

Ключевые слова: *колебания, кремний, излучение, кристалл, волновое число, электропроводность, спектр.*

Mukhtarov Erkinjon Kobiljonovich (Andijan State University; e-mail: erkinmuxtarov@yahoo.com)

FOURIER-IR SPECTROSCOPY OF POLYCRYSTALLINE SILICON PRODUCED BY POWDER TECHNOLOGY

Annotation. *Polycrystalline silicon, produced by powder technology, is widely used in various fields, including solar panels and semiconductor devices. One of the effective methods for analyzing the properties of such materials is Fourier-IR spectroscopy, which allows the investigation of the molecular and structural features of silicon derived from powder. This paper discusses the application of Fourier-IR spectroscopy to analyze polycrystalline silicon produced by powder metallurgy, with the aim of identifying its structural characteristics and detecting potential defects and features that affect its electrophysical properties.*

Keywords: *vibrations, silicon, radiation, crystal, wavenumber, electrical conductivity, spectrum.*

Введение. Поликристаллический кремний (ПК) является основным материалом для производства солнечных панелей, полупроводниковых компонентов и других электронных устройств [1; 113–114 с.]. Технологии получения кремния, такие как порошковая металлургия, позволяют значительно снизить стоимость материала по сравнению с традиционными методами. Однако структура и свойства поликристаллического кремния, полученного таким способом, могут значительно отличаться от кремния, полученного путем кристаллизации. Это, в свою очередь, влияет на его характеристики, такие как электропроводность, механическая прочность и оптические свойства [2;392–394 с.].

Для глубокой оценки этих характеристик и понимания влияния различных технологических процессов на качество кремниевых образцов часто используется Фурье-ИК спектроскопия. Этот метод позволяет изучать молекулярные вибрации и определять функциональные группы, а также выявлять структурные особенности, такие как дефекты и напряжения в материале [3;84 с.].

Цель данной работы – рассмотреть возможности Фурье-ИК спектроскопии для анализа поликристаллического кремния, полученного порошковым методом, и оценить влияние межкристаллических границ на его физико-химические и электрофизические свойства.

Анализ литературы. Фурье-ИК спектроскопия (Фурье-ИКС) основана на измерении поглощения инфракрасного излучения в молекулах вещества [5;1066–1067 с.]. Когда инфракрасное излучение проходит через образец, молекулы поглощают излучение на определенных частотах, что связано с колебаниями химических связей в молекулах. В случае поликристаллического кремния, спек-