FIZIKA-MATEMATIKA

Jabborov Nasriddin Mirzoodilovich (Toshkent davlat Iqtisodiyot universiteti "Amaliy matematika" kafedrasi professori; e-mail:jabborov61@mail.ru),
Eshdavlatova Sevara Eshmamatovna (Toshkent shahridagi Belarus-O'zbekiston qo'shma tarmoqlararo amaliy texnik kvalifikatsiyalar instituti tayanch doktoranti; e-mail:sevaraeshdavlatova@gmail.com),
Raufov Humoyun Roziq o'g'li (Toshkent davlat Transport universiteti "Oliy matematika" kafedrasi o'qituvchisi; e-mail:humoyunraufov3334@gmail.com)

POPULATSION TIZIMLARNING MATEMATIK MODELLASHTIRILISHI: MALTUS MODELI VA UNING MODIFIKATSIYASI

Annotatsiya. *Ushbu ishda populyatsion tizimlarning matematik modellashtirilishi asosida Maltus modeli va uning logistik modifikatsiyasi tahlil qilinadi. Tadqiqotning asosiy maqsadi aholi o'sishining matematik modellarini o'rganish, ularning nazariy asoslarini tushuntirish va cheklangan resurslar sharoitida aholi dinamikasini tahlil qilishdir. Ishda differensial tenglamalar va sonli metodlar yordamida Maltus modeli asosida populatsiya o'sishining dinamikasi o'rganiladi va logistik model bilan solishtiriladi. Modelni qo'llash imkoniyatlari va cheklovlari ko'rib chiqilgan.*

Kalit so'zlar: *Maltus modeli, Ferxyulst modeli, populatsiya, logistik o'sish.*

Жабборов Насриддин Мирзоодилович (профессор кафедры «Прикладной математики» Ташкентского государственного экономического университета e-mail:jabborov61@mail.ru),
Эшдавлатова Севара Эшмаматовна (базовый докторант совместного белорусско-узбекского межотраслевого института прикладных технических квалификаций; e-mail: sevaraeshdavlatova@gmail.com),
Рауфов Хумоюн Розик угли (преподаватель кафедры «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета; e-mail:humoyunraufov3334@gmail.com)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ: МОДЕЛЬ МАЛЬТУСА И ЕЁ МОДИФИКАЦИИ

Аннотация. *В данной работе проводится анализ модели Мальтуса и её логистической модификации на основе математического моделирования популяционных систем. Основная цель исследования – изучение математических моделей роста населения, объяснение их теоретических основ и анализ динамики популяции в условиях ограниченных ресурсов. В работе с использованием дифференциальных уравнений и численных методов исследуется динамика роста населения на основе модели Мальтуса и проводится сравнение с логистической моделью. Рассмотрены возможности применения модели и её ограничения.*

Ключевые слова: *Модель Мальтуса, модель Ферхюльста, популяция, логистический рост.*

Jabborov Nasriddin Mirzoodilovich (Professor of the "Applied Mathematics" Department at Tashkent State University of Economics; e-mail:jabborov61@mail.ru),
Eshdavlatova Sevara Eshmamatovna (Basic doctoral (PhD student) of the Belarussian-Uzbek Institute of joint inter-sectoral practical technical qualifications; e-mail: sevaraeshdavlatova@gmail.com)
Raufov Humoyun Roziq o'g'li (Teacher of the "Higher Mathematics" department of Tashkent State Transport University; e-mail:humoyunraufov3334@gmail.com)

MATHEMATICAL MODELING OF POPULATION SYSTEMS: THE MALTHUSIAN MODEL AND ITS MODIFICATION

Annotation. *This article analyzes the Malthus model and its logistic modification based on the mathematical modeling of population systems. The main objective of the research is to study mathematical models of population growth, explain their theoretical foundations, and analyze population dynamics under limited resource conditions. The dynamics of population growth are examined using differential equations and numerical methods based on the Malthus model, and a comparison is made with the logistic model. The applicability and limitations of the model are also discussed.*

Keywords: *Malthus model, Verhulst model, population, logistic growth.*

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili (Literature review). Thomas Robert Maltusning asarini o'rganish, unda aholi o'sishining eksponenta tarzda rivojlanishi va resurslarning cheklanganligi haqida fikrlar bildirgan. Bu modelning o'zagi bo'lib, uning modifikatsiyalari shu asosda quriladi. Maltusning «An Essay on the Principle of Population» (1798) kitobidagi tarixiy va matematik jihatlarni tahlil qilish, unda aholi o'sishi va uning cheklanishi haqida so'z yuritiladi. Maltus modelini amaliyotda ishlatish uchun, uni real sharoitlarda o'zgartirish yoki kengaytirish talab etiladi, ayniqsa, resurslarning cheklanganligi va boshqa ekologik omillarni hisobga olish kerak bo'ladi. Keyinchalik, Ferxyulst (1838) tomonidan logistik o'sish

modeli taklif etildi, bu model aholi sonining resurslarga mos cheklovlar bilan o'sishini hisobga oladi. Shu bilan birga, uning tadqiqotida bu model iqtisodiy va ekologik tizimlarda ham qo'llanilishi mumkinligi ko'rsatilgan. Robert May o'zining populyatsiya dinamikasi va ekologik modellari bo'yicha tadqiqotlarini 1970-yillardan boshlab olib borgan. U 1970-yillarda "Stability and Complexity in Model Ecosystems" (1973) asarida populyatsiya o'sishining murakkab tizimlaridagi barqarorlik va tartibsizlikni tahlil qilgan. Mayning ishlari ekologik tizimlar va populyatsiya dinamikasi sohalarida katta ta'sir ko'rsatdi va hozirgi kunga qadar muhim ilmiy yutuqlardan biri sifatida tan olinadi.

Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology). Tadqiqot metodologiyasi matematik modellashtirish usullariga asoslanadi, unda populyatsiya o'sishi va resurslar bilan bog'liq dinamikalar tahlil qilinadi. Maltus modelining asosiy prinsiplari va uning logistik modifikatsiyasi ko'rib chiqiladi. Tadqiqotda matematik tenglamalar, differensial tenglamalar va sonli metodlar yordamida aholi o'sishining cheklanishi va barqarorlik holatlari tahlil qilinadi.

Tahlil va natijalar (Analysis and results). Matematik modellashtirish zamonaviy fan va texnologiyalarning ajralmas qismi bo'lib, murakkab tizimlar va jarayonlarni o'rganishda asosiy vosita hisoblanadi. U real dunyo muammolarini aniqlash, tahlil qilish va ularning yechimlarini topish uchun matematik usullarni qo'llashni nazarda tutadi. Matematik modellashtirish jarayonlarni tushunish, muammolarni aniqlash va samarali yechimlarni ishlab chiqish uchun asosiy vositalardan biridir. Uning muhimligi turli sohalarda innovatsiyalarni rivojlantirish va bashorat qilish qobiliyatida yaqqol namoyon bo'ladi. Shu sababli matematik modellashtirish har qanday ilmiy izlanishning ajralmas qismi hisoblanadi.

Matematik modellashtirish turli sohalarda, jumladan, demografik o'sish, iqtisodiyot, ekologiya va ijtimoiy masalalarda muhim vosita hisoblanadi. Ushbu maqolada Maltus modeli va uning modifikatsiyalari ko'rib chiqilib, ularning zamonaviy qo'llanilishi va ahamiyati tahlil qilinadi. Ba'zi tipik sxemalar haqida so'z yuritamiz. Tipik sxemalar – bu matematik modellashtirishda keng qo'llaniladigan standartlashtirilgan usul va yondashuvlarning turlari. Ular muayyan masalalarni hal qilish uchun ishlatiladigan modellarni tavsiflashda va tuzishda asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi. Har bir tipik sxema o'zining aniq matematik asoslariga ega va turli-tuman jarayonlarni modellashtirish uchun mo'ljallangan.

1. Uzluksiz-deterministik D-sxemalar. Ushbu sxemalar boshqaruv nazariyasidagi turli modellarni tavsiflash uchun qo'llaniladi. Matematik model sifatida oddiy differensial tenglama yoki oddiy differensial tenglamalar tizimi uchun Koshi masalasi, shuningdek, boshlang'ich va chegaraviy shartlarga ega bo'lgan xususiy hosilalar bilan tenglamalar ishlatiladi. Optimal boshqaruv modellarida va ayrim boshqa optimallashtirish modellarida yechimlar chiziqli, noaniq yoki differensial tabiatga ega bo'lgan cheklovlar sharoitida topiladi.

2. **Diskret-deterministik F-sxemalar.** Ushbu sxemalar vaqt bo'yicha diskret ishlaydigan nazorat va boshqaruv qurilmalari modellarini tasvirlashda ishlatiladi. Matematik model avtomatning boshlang'ich holatini va chiqish parametrlarining qiymatlarini hozirgi vaqt momentida kirish parametrlarining va oldingi yoki joriy holatlarining qiymatlariga bog'liq bo'lgan tenglamalar yordamida aniqlashni o'z ichiga oladi. Tenglamalar o'rniga jadvallar yoki grafiklar ham ishlatilishi mumkin.

3. **Stoxastik modellar.** Stoxastik modellar ichida barcha yoki ayrim X,Y,H to'plamlari o'zgaruvchilari tasodifiy kattaliklar sifatida ko'rib chiqiladi. Qo'llanmada regressiya tipidagi modellar ko'rib chiqiladi, bu modellar kuzatishlarning statistik tahlilida katta ahamiyatga ega. Shuningdek, uzluksiz-stoxastik modellarda (Q-sxemalar) qaraladi, ular xizmat ko'rsatish tizimlarini tavsiflash uchun qo'llaniladi.

Biz ushbu maqolada D-sxemaga doir populyatsiya modeli va uning modifikatsiyasini ko'rib chiqamiz.:

Ushbu sxemalarni qo'llash misollari sifatida biologik tizimlar evolutsiyasi modellarini ko'rsatish mumkin. Shu o'rinda misol sifatida Maltus modelini ko'rib chiqamiz. Maltus modeli (yoki Maltus o'sish modeli) biologik populyatsiyalarni dinamikasi uchun klassik matematik modeldir. U, ko'pincha, resurslar yetishmovchiligi yoki tabiiy cheklovlar bo'lmagan sharoitda, populyatsiyaning o'sishining maksimal tezligini tavsiflash uchun ishlatiladi. Maltus modelida populyatsiya o'sishi vaqt o'tishi bilan doimiy ravishda yuqoriga qarab rivojlanadi, chunki uni boshqaradigan asosiy omil ko'payish va o'lim darajalarining farqi hisoblanadi. Maltus modelining asosiy farqi shundaki, u populyatsiyaning o'sishiga ta'sir etuvchi ekologik yoki resurslarga cheklovlarni hisobga olmaydi. Eng oddiy evolutsion model populyatsiya dinamikasi modeli (Maltus modeli) hisoblanadi.

Ushbu model birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasi bilan ifodalanadi:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a(t) - b(t))N(t), \qquad N(0) = N_0$$

bu yerda:

- $N(t)$ – populyatsiya soni;
- $a(t)$ – ko‘payish koeffitsiyenti;
- $b(t)$ – o‘lim koeffitsiyenti.

Mazkur tenglama o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechiladi.

O‘zgaruvchilarni ajratamiz va tenglamaning ikkala tomonini integrallab, umumiy integralga ega bo‘lamiz:

$$\int \frac{dN(t)}{dt} = \ln|N(t)| = \int (a(t) - b(t))dt + \ln C, \quad C \neq 0$$

Shunday qilib, umumiy yechim quyidagicha ko‘rinishga ega:

$N(t) = Ce^{\int (a(t)-b(t))dt}$. boshlang‘ich shartda kelib chiqib,

$N_0 = Ce^{\int (a(t)-b(t))dt|_{t=0}}$ va $C = N_0 e^{-\int (a(t)-b(t))dt|_{t=0}}$

Agar koeffitsiyentlar $a(t)$ va $b(t)$ o‘zgarmas bo‘lsa, u holda yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$N(t) = N_0 e^{(a-b)t}$.

Maltus modelining oddiyligi ba’zida uni real dunyo sharoitlarida qo‘llashni cheklaydi. Ammo uning oddiyligi sababli u murakkab real dunyo sharoitlarini to‘liq hisobga olib, to‘g‘ri bashorat qila olmaydi. Shu sababli ko‘plab olimlar va tadqiqotchilar Maltus modelini kengaytirishadi, ya’ni, uni yanada rivojlantirib, texnologik rivojlanish, resurslar cheklovlari yoki ijtimoiy omillarni hisobga oluvchi yangilangan modellar yaratdilar.

Maltus modelining modifikatsiyasi Ferxyulst modelidir, unda populyatsiyaning o‘sishiga cheklov qo‘yiladi va populyatsiya soni maksimal ruxsat etilgan qiymatga yaqinlashgan sari o‘sish sur’ati kamayadi. Model quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\right), \quad N(0) = N_0$$

bu yerda:

$N_{\max}$ – maksimal populyatsiya soni;

k – o‘sish koeffitsiyenti.

Bu modelni tadqiq qilishni quyidagi bosqichlar orqali amalga oshiramiz:

a) Stasionar holatlarni tekshiramiz:

Stasionar holat – bu tizim o‘zgarishsiz qoladigan nuqta, ya’ni $\frac{dN(t)}{dt} = 0$. Berilgan differensial tenglamani 0 ga tenglashtirib, statsionar holatlarni topamiz:

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\right) = 0$$

Bu tenglamani yechish uchun ikki holatni ko‘rib chiqamiz:

1. $N(t) = 0$ – populyatsiya yo‘q, bu holat stasionar.
2. $1 - \frac{N(t)}{N_{\max}} = 0$ va $N(t) = N_{\max}$ – bu holat populyatsiyaning maksimal qiymatiga yetganida statsionar holatga erishiladi.

Demak, statsionar holatlar: $N(t) = 0$ va $N(t) = N_{\max}$

b) Analitik va raqamli yechimlarni olish:

1. Analitik yechim:

Tenglama:

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\right)$$

Buni yechish uchun, avval, har bir tomonni integralga ajratamiz:

$$\frac{dN(t)}{(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\right)} = kdt$$

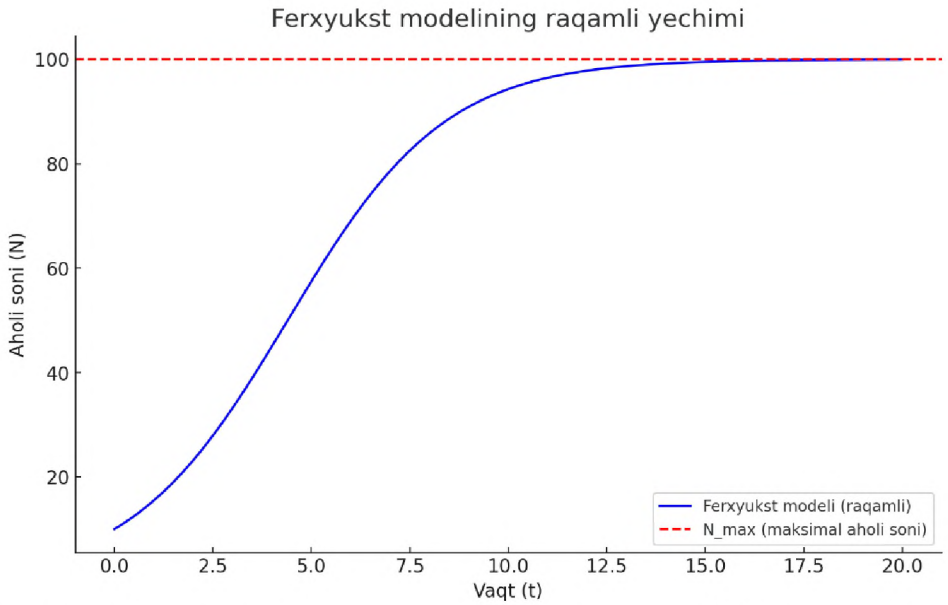
Keyin bu integralni hisoblash orqali $N(t)$ ni topamiz. Integralni yechish natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$N(t) = \frac{N_{\max}}{1 + \left(\frac{N_{\max} - N(0)}{N_{\max}}\right)e^{-kdt}}.$$

Bu yerda $N(0)$ – boshlang‘ich populyatsiya soni.

Analitik yechim orqali o‘sish tezligi k yoki tashuvchi imkoniyat N kabi parametrlarning o‘zgarishi aholi soniga qanday ta’sir ko‘rsatishini aniqlash osonlashadi. Masalan, resurslar ko‘payishi (N ortishi) bilan aholi soni yuqoriroq darajada barqarorlashadi.

Shuningdek, raqamli yechimni olish uchun, masalan, Eyler usulini yoki Runge-Kutta usulini qo‘llash mumkin. Bu usullarni kompyuter dasturida (masalan, Python yoki MATLAB) ishlatish mumkin. Kod yordamida populyatsiyaning vaqt bo‘yicha o‘sishini raqamli tarzda hisoblab, natijalarni chizish mumkin.



Populyatsiya soni, dastlab, eksponensial o‘sadi, lekin vaqt o‘tishi bilan, maksimal aholi soniga ($N_{\max} = 100$) yaqinlashib, barqarorlashadi. Qizil chiziq $N_{\max}$ qiymatini ifodalaydi.

Xulosa va takliflar (Conclusion/Recommendations). Eyler usuli yordamida hisoblangan natija populyatsiya o‘sishini, uning vaqt o‘tishi bilan barqaror holatga kelishini ko‘rsatadi. Olingan grafik yordamida vaqt bo‘yicha populyatsiyaning o‘sish sur’ati va maksimal qiymatga qanday yaqinlashganini tahlil qilish mumkin. Bu tahlil yordamida populyatsiya o‘sishining dinamikasini va resurslar cheklovlarini hisobga olish zarurligini ko‘rishimiz mumkin. Maltus modeli populyatsiya o‘sishining asosiy prinsiplarini, ya’ni, resurslar cheklangan holda aholi sonining eksponensial tarzda o‘sishini tushuntirishda muhim rol o‘ynaydi. Biroq u real tizimlarni to‘liq tasvirlamaydi, chunki tashqi omillar, masalan, kasalliklar, tabiiy resurslar va ijtimoiy faktorlar yetarlicha hisobga olinmagan. Maltus modelining logistik modifikatsiyasi resurslar cheklangan sharoitda aholi o‘sishining barqaror holatiga erishish imkoniyatini beradi. Bu model real hayotdagi ko‘plab ekologik tizimlar va iqtisodiy muhitni yaxshiroq tasvirlaydi. Tadqiqotda populyatsiya o‘sishi va resurslar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirlarni tahlil qilish uchun raqamli usullar yordamida modelning samaradorligi va to‘g‘riligi tasdiqlandi. Shuningdek, Populyatsion tizimlarning matematik modellaridan foydalanish or-

qali aholining barqaror o‘sishi va resurslar boshqaruvi bo‘yicha ilg‘or siyosat va strategiyalarni ishlab chiqish muhim. Bu, ayniqsa, rivojlanayotgan mamlakatlar uchun ahamiyatlidir.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati (References):

(1). Pianka, E.R. (2007, July 7). Eksponential population growth. In *FS 301:* The human overpopulation crisis. Retrieved from http://www.zo.utexas.edu/courses/THOC/EksponentialGrowth.htm.

(2). Skalski, J.R., Ryding, K.E., and Millspaugh, J.J. (2005). Figure 7.7. Coastal estuarine harbor seal abundance in Washington state, 1975–1999. Wildlife demography. Analysis of sex, age, and count data. Burlington, MA: Elsevier Academic Press.

(3). N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova. Korrupsiyani matematik modellashtirish va dinamikasini nazorat choralari orqali tahlil qilish. “O‘zMU xabarlari”, “Aniq fanlar”, 2023, 1/1, 13–20-betlar.

(4). N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova, S.G‘.To‘ychiyev. O‘zbekistonda sharoitida poraxo‘rlikning oldini olishning matematik model asosidagi tahlili. “Amaliy matematika, matematik modellashtirish va informatikaning dolzarb muammolari”. Respublika ilmiy konferensiya ma’ruzalar to‘plami, Nukus, 2024, 24–25-may, 186–188-betlar.

(5). S.E.Eshdavlatova, H.R.Raufov, N.X.Matyoqubova. Matematik modellashtirish yordamida yoshlar orasida jinoyatchilikning tarqalishini tadqiq qilish. “Raqamlashtirish sharoitida uzluksiz ta’limni sifat va samaradorligini oshirish: muammo va yechimlari” mavzusidagi respublika ilmiy-amaliy konferensiya ma’ruzalar to‘plami, Guliston, 2024, 7–8-iyun, 63–68-betlar.

(6). N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova. Функции Ляпунова и анализ глобальной стабильности для эпидемической модели. “Axborot texnologiyalaridan foydalanishni yangi bosqichga ko‘tarishning ilmiy asoslari va avtomatlashtirishning zamonaviy muammolari” mavzusidagi III xalqaro ilmiy anjuman, Toshkent, 2024, 20-noyabr, 687–689-betlar.

(7). J.H.Jones. Notes on R_0. Department of Anthropological Sciences. Stanford University. May 1, 2007, p. 19.

(8). J.O.Akanni, F.O.Akinpelu, S.Olaniyi, A.W.Ogunsola. Modelling financial crime population dynamics: optimal control and cost-effectiveness analysis. International Journal of Dynamics and Control, Volume 8, 2022.

(9). A.K.Fantaye, Z.K.Birhanu. Mathematical Model and Analysis of Corruption Dynamics with Optimal Control. Journal of Applied Mathematics, Volume, 2022.

Akhmedov Olimjon Samadovich (Toshkent Amaliy fanlar universiteti “Matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi; axmedov.olimjon70@gmail.com)

QOVUSHQOQ-ELASTIK ELLIPTIK SILINDRGA BO‘YLAMA VA KO‘NDALANG GARMONIK TO‘LQIN DIFRAKSIYASI

Annotatsiya. *Bu maqolada qovushqoq-elastik muhitdagi to‘ldiruvchili elliptik silindrga bo‘ylama va ko‘ndalang garmonik (P va SV) to‘lqinlar difraktsiyasi masalasining qo‘yilishi va yechish metodikasi keltirilgan. To‘lqin dinamikasidan ma’lumki bo‘ylama to‘lqin tezligi har doim ko‘ndalang to‘lqin tezligidan katta bo‘ladi. Bu masala elliptik koordinatalar sistemasida ko‘riladi. Eliptik koordinatalar sistemasini qo‘llash bunday masalalarda qulay bo‘lganligi sababli qo‘llaniladi.*

Kalit so‘zlar*: to‘ldiruvchi, bo‘ylama va ko‘ndalang to‘lqinlar, elliptik koordinatalar, to‘lqin uzunligi.*

Ахмедов Олимжон Самадович (Ташкентский университет прикладных наук, старший преподаватель кафедры “Математика”; axmedov.olimjon70@gmail.com)

ДИФРАКЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

Аннотация. *В статье изложены постановка и методика решения задачи дифракции продольных и поперечных гармонических (P и SV) волн на заполненном эллиптическом цилиндре в вязкоупругой среде. Из волновой динамики известно, что скорость продольной волны всегда больше скорости поперечной волны. Данная задача рассматривается в эллиптической системе координат. Использование эллиптической системы координат используется потому, что она удобна в таких задачах.*

Ключевые слова: *дополнитель, продольные и поперечные волны, эллиптические координаты, длина волны.*

Akhmedov Olimjon Samadovich (Tashkent University applied science, senior lecturer of the “Mathematics” department; axmedov.olimjon70@gmail.com)

DIFFRACTION OF LONGITUDINAL AND TRANSVERSE HARMONIC WAVES IN AN ELASTIC ELLIPTIC CYLINDER

Annotation. *The article presents the formulation and solution methods of the problem of diffraction of longitudinal and transverse harmonic (P and SV) waves on a filled elliptical cylinder in a viscoelastic medium. It is known from wave dynamics that the speed of a longitudinal wave is always greater than the*