Sharipov Rasulbek Axmedovich (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti "Matematik tahlil" kafedrasi dotsenti; r.sharipov@urdu.uz),
Vaisova Moxira Davlatboyevna (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti "Matematik tahlil" kafedrasi dotsenti; vaisovamoxira@urdu.uz),
Dushamov Akbar Olimboy o'g'li (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti "Matematik tahlil" kafedrasi tayanch doktoranti; dushamov.akbar@urdu.uz)

$(A)m$-QAVARIQ FUNKSIYALAR SINFINING AYRIM TOPOLOGIK VA GEOMETRIK XOSSALARI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining ayrim algebraik, topologik va geometrik xossalari o'rganiladi. Xususan, $(A)m$-qavariq funksiya bilan qavariq funksiyaning yig'indisi yana $(A)m$-qavariq bo'lishi, mazkur sinfning C^2-yaqinlashishga nisbatan yopiqligi hamda o'xshashlik almashtirishlariga nisbatan invariantligi isbotlanadi.*

Kalit so'zlar: *$(A)m$-qavariq funksiya, Gessian matritsa, xos qiymat, elementar simmetrik funksiya, Garding konusi, C^2-yaqinlashish, invariantlik.*

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССА $(A)m$-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. *В данной статье изучаются некоторые алгебраические, топологические и геометрические свойства класса $(A)m$-выпуклых функций. В частности, доказывается, что сумма $(A)m$-выпуклой функции и выпуклой функции снова является $(A)m$-выпуклой, а также доказывается замкнутость данного класса относительно C^2-сходимости и его инвариантность относительно преобразований подобия.*

Ключевые слова: *$(A)m$-выпуклая функция, матрица Гессе, собственное значение, элементарная симметрическая функция, конус Гардинга, C^2-сходимость, инвариантность.*

SOME TOPOLOGICAL AND GEOMETRIC PROPERTIES OF THE CLASS OF $(A)m$-CONVEX FUNCTIONS

Annotation. *In this paper, several algebraic, topological, and geometric properties of the class of $(A)m$-convex functions are studied. In particular, it is proved that the sum of an $(A)m$-convex function and a convex function is again $(A)m$-convex. Furthermore, the closedness of this class with respect to C^2-convergence and its invariance under similarity transformations are established.*

Keywords: *$(A)m$-convex function, Hessian matrix, eigenvalue, elementary symmetric function, Gårding cone, C^2-convergence, invariance.*

Kirish. Qavariq funksiyalar nazariyasi matematik analiz, qavariq geometriya, differensial tenglamalar va potensiallar nazariyasida muhim o'rin tutadi. Klassik qavariqlik tushunchasi, odatda, funksiyaning Gessian matritsasining musbat aniqlanganligi orqali tavsiflanadi. Biroq bugungi kunda ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida olib borilayotgan tadqiqotlar qavariqlikning turli umumlashmalarini, xususan, m-qavariq va $(A)m$-qavariq funksiyalar sinflarini o'rganish zaruratini yuzaga keltirdi.

m-qavariq funksiyalar nazariyasi haqiqiy analiz va qavariq geometriyaning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, u Gessian operatorlari va ularning xos qiymatlari orqali aniqlanadigan funksiyalar sinflarini o'rganish bilan bog'liq. Bu sinf klassik qavariq funksiyalar va subgarmonik funksiyalar orasidagi ma'lum bir oraliq holatni ifodalaydi. Xususan, $m=1$ bo'lganda m-qavariq funksiyalar sinfi $\mathbb{R}^n$dagi klassik qavariq funksiyalar sinfi bilan, $m=n$ bo'lganda esa subgarmonik funksiyalar sinfi bilan mos keladi.

Qavariq funksiyalar nazariyasi A.D.Aleksandrov [1], [2], I.Y.Bakelman [3], [4] A.V.Pogorelov [8] va boshqa olimlarning ishlarida keng o'rganilgan. $m>1$ bo'lgan hollarda esa m-qavariq funksiyalar va ularga bog'liq Gessian tipidagi operatorlar nazariyasi N.M.Ivochkin, N.Trudinger, X.Vang, R.Sharipov, M. Ismailov va boshqa mualliflarning tadqiqotlarida rivojlantirilgan (10], [11], [12).

So'nggi yillarda m-qavariq funksiyalar bilan bir qatorda ularning maxsus umumlashmalaridan biri bo'lgan $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfi ham alohida qiziqish uyg'otmoqda. Mazkur sinf Gessian matritsa-

ning xos qiymatlari va elementar simmetrik funksiyalar yordamida aniqlanadi. Shu sababli $(A)m$-qavariq funksiyalarni o‘rganish Garding konuslari, Gessian operatorlari va qavariq geometriya bilan uzviy bog‘liqdir.

Ma’lumki, m-qavariq funksiyalar sinfi bir qator tabiiy algebraik va geometric xossalarga ega. Biroq $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfi uchun bunday xossalar har doim ham o`rinli bo‘lavermaydi. Masalan, ikkita $(A)m$-qavariq funksiyaning yig‘indisi umumiy holda yana $(A)m$-qavariq bo‘lishi shart emas. Shuningdek, umumiy holda $(A)m-cv \subset (A)(m+1)-cv$ munosabati bajarilmasligi mumkin. Bu holat $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining m-qavariq funksiyalar sinfiga nisbatan murakkabroq tuzulishga ega ekanligini ko‘rsatadi. Ushbu maqolaning asosiy maqsadi $\mathbb{R}^n$ fazoda aniqlangan $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining ayrim algebraik, topologik va geometrik xossalarini o‘rganishdan iborat.

Asosiy natijalar. $D \subset \mathbb{R}^n$ soha va $u \in C^2(D)$ bo‘lsin. $G_u(x) = \left(\dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{j,k=1}^{n}$ Hessian matritsaning xos qiymatlari vektorini $\lambda(G_u(x)) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x))$ deb belgilaymiz.

1-ta’rif. *Agar har bir* $x \in D$ *uchun*

$$H_k\left(\lambda(G_u(x))\right) \geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-m+1, \tag{1}$$

bo‘lsa, u holda u *funksiya* D *sohada* m*-qavariq funksiya deyiladi.*

Bu yerda

$$H_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}$$

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vektorning k-elementar simmetrik funksiyasi.

Bu ta’rifni $\lambda(G_u(x)) \in \overline{\Gamma}_{n-m+1}$ ko‘rinishda ifodalash ham mumkin, bu yerda

$$\overline{\Gamma}_m = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n : H_k(\lambda) \geq 0, k = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

Garding konusining yopig‘ini bildiradi.

2-ta’rif. $D \subset \mathbb{R}^n$ *soha va* $u \in C^2(D)$ *bo‘lsin. Agar har bir* $x \in D$ *nuqtada barcha* $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$ *indekslar uchun*

$$\lambda_{j_1}(x) + \cdots + \lambda_{j_m}(x) \geq 0 \tag{2}$$

va

$$H_{n-m+1}(\lambda(x)) \geq 0. \tag{3}$$

shartlar bajarlsa, u holda u *funksiya* D *sohada* $(A)m$*-qavariq deyiladi:*

D.Qalandarovaning [13] ishida m-qavariq va $(A)m$-qavariq funksiyalar sinflarining ustma-ust tushish holatlari o‘rganiladi. Xususan, $n = 2$ bo‘lganda bu ikki sinf ustma-ust tushadi, ya’ni $(A)m - cv = m - cv$. Shuningdek, $m = 3$ bo‘lgan holda ayrim maxsus o‘lchamlar uchun ham ushbu sinflarning tengligi isbotlangan. Jumladan, $n = 8$ va $n = 9$ hollarda $(A)3 - cv = 3 - cv$ tenglik bajariladi. Biroq bu tenglik umumiy holda o‘rinli emas. Masalan, $m = 3$ va $n = 10$ bo‘lgan holda ikki marta silliq funksiyalar sinfida $(A)3$-qavariq va 3-qavariq funksiyalar sinflari ustma-ust tushmasligi ko‘rsatilgan. Ya’ni bu holda $(A)3 - cv \neq 3 - cv$.

Demak, m-qavariqlik va $(A)m$-qavariqlik orasidagi munosabat fazoning o‘lchami n hamda parametr m ga sezilarli ravishda bog‘liq.

$(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining chiziqlilik xossasi. Ushbu bo‘limda $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining ayrim algebraik, topologik va geometrik xossalari o‘rganiladi. Avvalo, klassik m-qavariq funksiyalar sinfidan farqli ravishda, $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfi umumiy holda, yig‘indiga nisbatan yopiq emasligini ko‘rsatamiz.

Ma'lumki, m-qavariq funksiyalar sinfi musbat koeffitsientli chiziqli kombinatsiyalarga nisbatan yopiqdir (11). Biroq $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfi uchun bunday xossa umumiy holda bajarilmaydi. Bunga quyidagi misol orqali ishonch hosil qilishimiz mumkin.

1-misol. $\mathbb{R}^{10}$ fazoda quyidagi ikki marta silliq funksiyalarni qaraymiz:

$$u(x)=10\sum_{j=1}^{8}x_j^2-5x_9^2-5x_{10}^2 \text{ va } v(x)=-x_1^2-x_2^2+2\sum_{j=3}^{10}x_j^2,$$

bu yerda $x=(x_1,\ldots,x_{10})\in\mathbb{R}^{10}$.

Ammo bu funksiyalar uchun $u\in(A)3-cv(\mathbb{R}^{10})$ va $v\in(A)3-cv(\mathbb{R}^{10})$, lekin $w(x)=u(x)+v(x)$ funksiya bu sinfga tegishli emasligini ko'rsatish mumkin.

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: *$(A)m$-qavariq funksiyalar sinfi umumiy holda yig'indiga nisbatan yopiq emas*. Xususan, bu sinf chiziqli fazo tashkil qilmaydi. Shu sababli $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining qaysi qo'shimcha shartlar ostida qo'shishga nisbatan saqlanishini aniqlash tabiiy masala hisoblanadi.

Agar qo'shiluvchilardan biri odatdagi ma'noda qavariq funksiya bo'lsa ham, u holda yig'indi $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfiga tegishli bo'lib qolmas ekan. Buni quyidagi misol yordamida ko'rsatamiz.

2-misol. $D\subset\mathbb{R}^{11}$ sohada aniqlangan funksiyalar uchun $n=11$ va $m=5$ bo'lsin. Quyidagi funksiyani qaraymiz $u(x)=-x_1^2-\frac{2}{5}x_2^2+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{11}x_i^2$. Ushbu funksiyaning Gessian matritsasi $G_u=\operatorname{diag}\left(-2,-\frac{4}{5},1,1,\ldots,1\right)$ ko'rinishida bo'lib, uning xos qiymatlari $\lambda=\left(-2,-\frac{4}{5},1,\ldots,1\right)$ vektorini tashkil etadi. Gessian operatori H_7 (bu yerda $k=n-m+1=7$) uchun hisoblashlar shuni ko'rsatadiki,

$$H_7(\lambda)=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_7\le 11}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_7}=\frac{12}{5}>0.$$

Demak, $u\in(A)5-cv(D)$. Endi $v(x)=\frac{1}{2}x_3^2$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning Gessian matritsasi $G_v=\operatorname{diag}(0,0,1,0,\ldots,0)$ bo'lib, u qavariq funksiyadir.

Yig'indi funksiya $w(x)=u(x)+v(x)$ ning Gessian matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$G_w=G_u+G_v=\operatorname{diag}\left(-2,-\frac{4}{5},2,1,\ldots,1\right).$$

Yig'indi funksiyaning xos qiymatlari $\mu=\left(-2,-\frac{4}{5},2,1,\ldots,1\right)$ vektoridan iborat. Ushbu vektor uchun $H_7(\mu)$ qiymatini hisoblasak, $H_7(\mu)=-\frac{72}{5}<0$. Natijada $w\notin(A)5-cv(D)$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi ikkinchi funksiyaga qo'ygan shartimizni affinlik shartiga o'zgartiramiz.

1-teorema. *$D\subset\mathbb{R}^n$ soha va $u\in(A)m-cv(D)$ bo'lsin. Agar $\ell(x)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b$ affin funksiya bo'lsa, u holda $u+\ell\in(A)m-cv(D)$ bo'ladi.*

Isbot. Affin funksiya uchun $G_\ell(x)=0$. Shuning uchun $G_{u+\ell}(x)=G_u(x)$. Demak, $u+\ell$ va u funksiyalarning Hessian matritsalari ustma-ust tushadi. Natijada ularning xos qiymatlari ham ustma-ust tushadi, ya'ni $\lambda(G_{u+\ell}(x))=\lambda(G_u(x))$. $u\in(A)m-cv(D)$ bo'lganligi sababli (2) va (3) shartlar bajariladi. Xos qiymatlarning tengligidan xuddi shu shartlar $u+\ell$ uchun ham bajariladi. Demak, $u+\ell\in(A)m-cv(D)$.

2-teorema. *Agar $u\in(A)m-cv(D)$ va $c\ge 0$ bo'lsa, u holda $cu\in(A)m-cv(D)$ bo'ladi.*

Isbot. Agar $c = 0$ bo‘lsa, tasdiq ravshan. $c > 0$ bo‘lsin. U holda $G_{cu}(x) = cG_u(x)$. Shuning uchun Hessian xos qiymatlari $\lambda(G_{cu}(x)) = c\lambda(G_u(x))$ bo‘ladi. Demak,

$$c\lambda_{j_1}(x) + \cdots + c\lambda_{j_m}(x) = c\Big(\lambda_{j_1}(x) + \cdots + \lambda_{j_m}(x)\Big) \geq 0.$$

Bundan tashqari,

$$H_{n-m+1}(c\lambda) = c^{n-m+1} H_{n-m+1}(\lambda) \geq 0.$$

Demak, $cu \in (A)m - cv(D)$.

Yuqoridagi tasdiqlardan ko‘rish mumkinki, $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfi umumiy holda qo‘shishga nisbatan yopiq emas, biroq nomanfiy skalyar ko‘paytirishga nisbatan yopiqdir. Shu bilan birga, qo‘shiluvchi funksiyaga ma’lum qo‘shimcha cheklovlar qo‘yilganda ham $(A)m$-qavariqlikni saqlash mumkin. Buning uchun, avvalo, qat’iy $(A)m$-qavariqlik tushunchasini kiritamiz.

3-ta’rif. *$D \subset \mathbb{R}^n$ soha va $u \in C^2(D)$ bo‘lsin. Agar har bir kompakt $K \Subset D$ uchun shunday $\delta_K > 0$ son mavjud bo‘lib, barcha $x \in K$ va barcha $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$ indekslar uchun*

$$\lambda_{j_1}(x) + \cdots + \lambda_{j_m}(x) \geq \delta_K \tag{4}$$

hamda

$$H_{n-m+1}(\lambda(x)) \geq \delta_K \tag{5}$$

shartlar bajarilsa, u holda u funksiya D sohada qat’iy $(A)m$-qavariq funksiya deyiladi.

3-teorema. *Agar u funksiya D sohada qat’iy $(A)m$-qavariq bo‘lsa, u holda har bir kompakt $K \Subset D$ uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjudki, $\sup\limits_{x \in K} \| G_\varphi(x) \| < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $\varphi \in C^2(D)$ uchun $u + \varphi \in (A)m - cv(K)$ bo‘ladi.*

Isbot. u funksiya K da qat’iy $(A)m$-qavariq bo‘lganligi sababli, har bir $J = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $|J| = m$, uchun

$$S_J(x) = \lambda_{j_1}(x) + \cdots + \lambda_{j_m}(x) \tag{6}$$

funksiya K da musbatdir. $u \in C^2(D)$ bo‘lganligi sababli $G_u(x)$ uzluksiz matritsa-qiymatli funksiyadir. Shuningdek, simmetrik matritsaning xos qiymatlari uning elementlariga uzluksiz bog‘liq . Xos qiymatlar uzluksiz bo‘lganligi sababli $S_J(x)$ ham K da uzluksiz. K kompakt va bunday J lar soni chekli bo‘lgani uchun $\delta_1 = \min\limits_{\substack{x \in K \\ |J| = m}} S_J(x) > 0$. Shuningdek, $x \mapsto H_{n-m+1}(\lambda(G_u(x)))$

uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun $\delta_2 = \min\limits_{x \in K} H_{n-m+1}(\lambda(G_u(x))) > 0$. Endi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ deb olamiz. Ixtiyoriy $\varphi \in C^2(D)$ uchun $A(x) = G_u(x)$, $B(x) = G_\varphi(x)$ deb belgilaymiz. U holda

$$G_{u+\varphi}(x) = A(x) + B(x).$$

$A(x)$ning xos qiymatlarini $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$, $A(x) + B(x)$ ning xos qiymatlarini esa $\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)$ deb belgilaymiz. Xos qiymatlarni bir xil tartibda joylashtiramiz.

Simmetrik matritsalar xos qiymatlari uchun Veyl tengsizligiga ko‘ra (q.[5])

$$|\mu_i(x) - \lambda_i(x)| \leq \| B(x) \|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Agar $\sup\limits_{x \in K} \| G_\varphi(x) \| < \varepsilon$ bo‘lsa, u holda har bir $x \in K$ va $i = 1, \ldots, n$ uchun $\left|\mu_i(x) - \lambda_i(x)\right| < \varepsilon$ bo‘ladi. Avval, $(A)m$-qavariqlikning birinchi shartini tekshiramiz. Ixtiyoriy $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$ uchun $\mu_{j_1}(x) + \cdots + \mu_{j_m}(x) \geq \lambda_{j_1}(x) + \cdots + \lambda_{j_m}(x) - m\varepsilon$. Demak, $\mu_{j_1}(x) + \cdots + \mu_{j_m}(x) \geq \delta - m\varepsilon$. Agar $\varepsilon \leq \dfrac{\delta}{2m}$ bo‘lsa, u holda $\mu_{j_1}(x) + \cdots + \mu_{j_m}(x) \geq \dfrac{\delta}{2} > 0$. Demak, $u + \varphi$ funksiya $(A)m$-qavariqlik ta’rifidagi birinchi shartni K da qanoatlantiradi.

Endi ikkinchi shartni tekshiramiz. Demak, $K \Subset D$ kompakt bo‘lganligi sababli $M_0 = \sup\limits_{x\in K} \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i(x)| < \infty$. $M = M_0 + 1$ deb olamiz. Agar $\varepsilon \le 1$ bo‘lsa, u holda $|\mu_i(x)| \le M$ va $|\lambda_i(x)| \le M$. H_k elementar simmetrik ko‘phad bo‘lgani uchun

$$H_k(\xi) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}.$$

Uning hosilalari $\dfrac{\partial H_k}{\partial \xi_i}(\xi) = H_{k-1}\left(\xi\,|_{\xi_i=0}\right)$ ko‘rinishga ega. Shuning uchun $|\xi_i| \le M$ bo‘lgan sohada

$$\left|\frac{\partial H_k}{\partial \xi_i}(\xi)\right| \le \binom{n-1}{k-1} M^{k-1}.$$

O‘rta qiymat teoremasiga ko‘ra,

$$|H_k(\mu(x)) - H_k(\lambda(x))| \le C\,\|\mu(x) - \lambda(x)\,\|_\infty,$$

bu yerda $C = n\binom{n-1}{k-1}M^{k-1}$. Yuqoridagi xos qiymatlar bahosidan $\|\mu(x) - \lambda(x)\,\|_\infty < \varepsilon$.

Demak, $H_k(\mu(x)) \ge H_k(\lambda(x)) - C\varepsilon \ge \delta - C\varepsilon$. Agar $\varepsilon \le \dfrac{\delta}{2C}$, bo‘lsa, u holda

$$H_k(\mu(x)) \ge \frac{\delta}{2} > 0.$$

Endi $\varepsilon > 0$ ni quyidagicha tanlaymiz $\varepsilon < \min\left\{1, \dfrac{\delta}{2m}, \dfrac{\delta}{2C}\right\}$. Shunda har bir $x \in K$ uchun

$$\mu_{j_1}(x) + \cdots + \mu_{j_m}(x) \ge 0, \qquad 1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n,$$

va

$$H_{n-m+1}(\mu(x)) \ge 0$$

bo‘ladi. Bu esa aynan $u + \varphi \in (A)m\text{-}cv(K)$ ekanligini bildiradi.

$(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining topologik xossasi. $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining algebraik xossalaridan tashqari, uning topologik xossalarini ham o‘rganish muhimdir. Xususan, funksiyalar ketma-ketligi ma’lum ma’noda yaqinlashganda limit funksiya ham $(A)m$-qavariq bo‘lib qoladimi, degan savol tabiiy ravishda paydo bo‘ladi. Quyida $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfining C^2_{loc}-topologiyada yopiq ekanligini ko‘rsatamiz.

4-ta’rif. *$D \subset \mathbb{R}^n$ soha bo‘lsin. Agar $\{u_j\} \subset C^2(D)$ funksiyalar ketma-ketligi va $u \in C^2(D)$ funksiya uchun har bir $K \Subset D$ kompaktda $j \to \infty$ da $\|u_j - u\,\|_{C^2(K)} \to 0$ bajarilsa, u holda $u_j(x)$ ketma-ketlik $u(x)$ ga $C^2_{\text{loc}}(D)$ ma’noda yaqinlashadi deyiladi, bu yerda*

$$\|u_j - u\,\|_{C^2(K)} = \max_{|\alpha|\le 2} \sup_{x\in K} \left|\mathcal{D}^\alpha u_j(x) - \mathcal{D}^\alpha u(x)\right|.$$

4-teorema. *$D \subset \mathbb{R}^n$ soha bo‘lsin. Faraz qilaylik, $u_j \in (A)m - cv(D)$, $j = 1, 2, \ldots$, va $u_j \to u$, $C^2_{\text{loc}}(D)$ ma’noda bajarilsin. U holda, $u \in (A)m - cv(D)$ bo‘ladi.*

Isbot. Ixtiyoriy $x \in D$ nuqtani fiksirlaymiz. $u_j \to u$ yaqinlashish $C^2_{\text{loc}}(D)$ ma’noda bajarilganligi sababli $\left(\mathcal{D}^2 u_j(x)\right) \to \left(\mathcal{D}^2 u(x)\right)$ matritsalar yaqinlashishi o‘rinli.

Quyidagicha belgilaymiz $G_{u_j}(x) = D^2 u_j(x)$ va $G_u(x) = D^2 u(x)$. $G_{u_j}(x)$ va $G_u(x)$ haqiqiy simmetrik matritsalardir. Ularning xos qiymatlarini bir xil tartibda, masalan, o‘sish tartibida joylashtiramiz:

$$\lambda_1^{(j)}(x) \le \lambda_2^{(j)}(x) \le \cdots \le \lambda_n^{(j)}(x),$$

$$\lambda_1(x) \le \lambda_2(x) \le \cdots \le \lambda_n(x).$$

Simmetrik matritsalar xos qiymatlari matritsa elementlariga uzluksiz bog‘liq va Veyl tengsizligiga (q. [5]) ko‘ra,

$$\max_{1\le i\le n} \left|\lambda_i^{(j)}(x) - \lambda_i(x)\right| \le \|G_{u_j}(x) - G_u(x)\ \|.$$

Shuning uchun $\lambda_i^{(j)}(x) \to \lambda_i(x)$, $i = 1,\ldots,n$. Har bir $u_j \in (A)m - cv(D)$ bo‘lganligi sababli, ta’rifga ko‘ra, barcha $1 \le r_1 < \cdots < r_m \le n$ indekslar uchun $\lambda_{r_1}^{(j)}(x) + \cdots + \lambda_{r_m}^{(j)}(x) \ge 0$ tengsizlik bajariladi. $j \to \infty$ da limitga o‘tsak, $\lambda_{r_1}(x) + \cdots + \lambda_{r_m}(x) \ge 0$ hosil bo‘ladi.

Endi ikkinchi shartni tekshiramiz. Har bir j uchun $H_{n-m+1}\left(\lambda^{(j)}(x)\right) \ge 0$ bo‘ladi, bu yerda

$$\lambda^{(j)}(x) = \left(\lambda_1^{(j)}(x),\ldots,\lambda_n^{(j)}(x)\right).$$

H_{n-m+1} elementar simmetrik ko‘phad bo‘lganligi sababli, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ o‘zgaruvchilarga nisbatan uzluksizdir. Demak,

$$H_{n-m+1}(\lambda(x)) = \lim_{j\to\infty} H_{n-m+1}\left(\lambda^{(j)}(x)\right) \ge 0.$$

Shunday qilib, $\left(\mathcal{D}^2 u(x)\right)$ matritsaning xos qiymatlari $\lambda(x) = \left(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_n(x)\right)$ $(A)m$-qavariqlik ta’rifidagi ikkala shartni ham qanoatlantiradi. $x \in D$ ixtiyoriy tanlangan edi. Demak, $u \in (A)m - cv(D)$. *Teorema isbotlandi.*

$(A)m$-qavariq funksiyalarning geometrik xossasi.

5-ta’rif (*O‘xshashlik almashtirishi*). *$\mathbb{R}^n$ fazoda o‘xshashlik almashtirishi deb, $\Phi(x) = cOx + b$ ko‘rinishidagi almashtirishga aytiladi, bu yerda $O \in O(n)$ – ortogonal matritsa, $c > 0$ – masshtab koeffitsiyenti, $b \in \mathbb{R}^n$ – siljitish vektori.*

5-teorema (*O‘xshashlik almashtirishlariga nisbatan invariantlik*) *Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{R}^n$ soha va $u \in (A)m - cv(D)$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy o‘xshashlik almashtirishi $\Phi(x) = cOx + b$ uchun $v(x) = u(\Phi(x))$ funksiya $\Phi^{-1}(D)$ sohada $(A)m$-qavariq bo‘ladi.*

Isbot. $u \in (A)m - cv(D)$ berilgan, ya’ni, $u \in C^2(D)$ va uning Gessian matritsasi $G_u(y)$ ning xos qiymatlari $\lambda_1(y) \le \cdots \le \lambda_n(y)$ har bir $y \in D$ uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\lambda_{j_1}(y) + \ldots + \lambda_{j_m}(y) \ge 0, \qquad 1 \le j_1 < \ldots < j_m \le n,$$

$$H^{n-m+1}\left(\lambda_1(y),\ldots,\lambda_n(y)\right) \ge 0.$$

$v(x) = u(cOx + b)$ ning Gessian matritsasi zanjir qoidasiga ko‘ra, quyidagicha hisoblanadi: (q. [7])

$$G_v(x) = c^2 O^T G_u(cOx + b)O.$$

O ortogonal bo‘lgani uchun $O^T G_u O$ matritsa G_u ga o‘xshash va ularning xos qiymatlari bir xil. $c^2 > 0$ ga ko‘paytirish esa barcha xos qiymatlarni c^2 marta o‘zgartiradi. Shunday qilib, $G_v(x)$ ning xos qiymatlari $\mu_i(x) = c^2\lambda_i(cOx + b), i = 1,\ldots,n$ va ular o‘sish tartibida joylashgan.

Endi v funksiya uchun $(A)m$-qavariqlik shartlarini tekshiramiz.

Birinchi shart

$$\mu_{j_1}(x) + \ldots + \mu_{j_m}(x) = c^2\left(\lambda_{j_1}(cOx + b) + \ldots + \lambda_{j_m}(cOx + b)\right) \ge 0,$$

chunki u uchun qavs ichidagi ifoda nomanfiy.

Ikkinchi shart

$$H^{n-m+1}\left(\mu_1(x),\ldots,\mu_n(x)\right) = H^{n-m+1}\left(c^2\lambda_1(cOx + b),\ldots,c^2\lambda_n(cOx + b)\right) =$$

$$= (c^2)^{n-m+1} H^{n-m+1}\left(\lambda_1(cOx + b),\ldots,\lambda_n(cOx + b)\right) \ge 0,$$

chunki u da $H^{n-m+1}(\lambda) \geq 0$ va $(c^2)^{n-m+1} > 0$. Demak, v funksiya $D' = \Phi^{-1}(D)$ da $(A)m$-qavariqlik ta'rifidagi ikkala shartni ham qanoatlantiradi. Shuning uchun $v \in (A)m - cv(D')$. *Teorema isbotlandi.*

Xulosa. Maqolada olingan natijalar $(A)m$-qavariq funksiyalar sinfi klassik qavariq va subgarmonik funksiyalar sinflari kabi muhim geometrik hamda topologik invariantlik xossalariga ega ekanligini tasdiqlaydi. Xususan, almashtirishlarga nisbatan barqarorlik va $C^2_{\text{loc}}(D)$ topologiyasidagi yopiqlik xossalari ushbu sinf ustida matematik analiz operatorlarini qo'llash imkoniyatini kengaytiradi. Olingan natijalar kelgusida Hessian tipidagi nochiziqli differensial tenglamalar uchun hamda potensiallar nazariyasining turli masalalarida asosiy apparat sifatida xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

[1]. Aleksandrov A.D. Intrinsic geometry of convex surfaces. OGIZ, Moscow, 1948; German transl., Akademie-Verlag, Berlin, 1955.

[2]. Александров А.Д. Геометрия и приложения, Том 1. Новосибирск, "Наука", 2006, 748 с.

[3]. Bakelman I.J. Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1994.

[4]. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию в целом. М., "Наука", 1973.

[5]. R.Bhatia. Matrix Analysis, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 169, Springer, New York, 1997.

[6]. Caffarelli L., Nirenberg L. and Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian, *Acta* Mathematica,155 (1985), p. 261–301.

[7]. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[8]. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., "Наука", 1969.

[9]. Привалов И.И. Субгармонические функции. М., Гостехиздат, 1937.

[10]. Trudinger N.S. and Wang X.J. Hessian measures III, Ann. Math. V.150 (2002), p. 579–604.

[11]. Sharipov R., Ismoilov M.B. m-convex () functions, Azerbaijan Journal of Mathematics, Vol 13, № 2 (2023), p. 237–247.

[12]. Sharipov R.A., Ismoilov M.B. Hessian measures in the class of m-convex (m-cv) functions. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, № 3(115), 2024, p. 93–100.

[13]. Qalandarova D., Olloyorova M. $(A)m$-qavariq funksiyalarning ba'zi xossalari, "Ilm sarchashmalari", 7 (2025), p. 11–16.

Razzokov Alijon Shonazarovich (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, H.Olimjon, 14, Urganch, 220100, O'zbekistan, f.-m.f.d. prof.; e-mail: a.razzokov777@gmail.com),

Koshchanova Durdona Ermatovna (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, H.Olimjon, 14, Urganch, 220100, O'zbekistan, o'qituvchi; e-mail: dona2525@mail.ru),

Abdullayeva Sevara Otaxon qizi (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, H.Olimjon, 14, Urganch, 220100, O'zbekistan)

$(GE2)_{1-X-Y}(GAAS)_X(ZNSE)_Y$ VA $SI_{1-X}GE_X$ QATTIQ QORISHMALARNING TERMODINAMIK PARAMETRLARINI ANIQLASH

Annotatsiya. *Mazkur ishda suyuq fazali epitaksiya usuli yordamida qalay (Sn) asosidagi eritmadan o'stiriladigan* $(Ge_2)_{1-x-y}(GaAs)_x(ZnSe)_y$ *ko'p komponentli va* $Si_{1-x}Ge_x$ *yarimo'tkazgich qattiq qorishmalarining termodinamik tahlili keltirilgan. Suyuq va qattiq fazalardagi komponentlarning aktivlik koeffitsiyentlarini tavsiflovchi umumlashtirilgan termodinamik model atomlararo o'zaro ta'sir parametrlariga hamda Gibbs erkin energiyasi formalizmiga asoslanib ishlab chiqilgan. Qattiq qorishmaning umumiy aralashish Gibbs erkin energiyasi, komponentlararo o'zaro ta'sir energiyasi aniqlangan* $(Ge_2)_{0.02}(GaAs)_{0.95}(ZnSe)_{0.03}$ *tarkibli va* $Si_{1-x}Ge_x$ $(0<x<1)$ *qattiq qorishmalar qalayli eritmadan, mos ravishda, 750C, 950C boshlang'ich haroratlarda o'stirilgan. Bunda* $(Ge_2)_{0.02}(GaAs)_{0.95}(ZnSe)_{0.03}$ *uchun Gibbs energiya qiymatlari* G^{mix}*=-2980 J/mol va* G^{ex}*= -1030 J/mol ga, kritik harorat esa 137 K ga teng bo'lgan.* $Si_{1-x}Ge_x$ *qattiq qorishma uchun* G^{mix}*=-6710 J/mol va kritik harorat 80 Kni tashkil qilgan.*

Kalit so'zlar: *epitaxy, Gibbs energy, activity koeffitsiyent, solid solution.*