(2). Yan Leng, Yuanyuan Nie, Qian Zhou. Asymptotic behavior of solutions to a class of coupled nonlinear parabolic systems. Boundary Value Pr., 2019, p. 68–79.

(3). Yohei Fujishima, Kazuhiro Ishige. Blowing Up Solutions for Nonlinear Parabolic Systems with Unequal Elliptic Operators. Dynamics and Differential Equations, 2019, p. 1219–1231.

(4). Matyakubov A.S., Raupov D.R. On Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion. Scopus: Springer Nature Switzerland AG. 2021, 289–303 p.

(5). Aripov M. and Raimbekov J. "The critical curves of a doubly nonlinear parabolic equation in non-divergent form with a source and nonlinear boundary flux," Journal of Siberian Federal University 12(1), 2019, p. 112–124.

(6). Mirsaid Aripov, Alisher Matyakubov. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form. International Journal of Innovative Science, Engineering Technology. 2016, p. 533–537.

(7). Aripov M., Atabaev O., Al-Marashi A. On the behavior of solutions of a doubly nonlinear degenerate parabolic system with nonlinear sources and absorptions with variable densities. Bulletin of the Karaganda Un-y, 2025, №.1 (117), p. 12–23.

(8). A.S.Matyakubov. Finite Speed of the Perturbation Distribution and Asymptotic Behavior of the Solutions of a Parabolic System not in Divergence Form. Universal Journal of Computational Mathematics, 5 (3), 2017, p. 57–67.

(9). Aripov M., Matyakubov A. To the properties of the solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form. Universal Journal of Computational Mathematics, 2017, 5(1), p. 1–7.

(10). Aripov M., Matyakubov A. On the asymptotic behavior solutions of nonlinear parabolic systems of equations not in divergence form. The KazNU Journal. 2015, 3 (86), p. 275–282.

(11). Aripov M., Matyakubov A.S. Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behaviour. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2017, 8(1), p. 5–12.

(12). A.S.Matyakubov, J.I.Salimov. To the properties of the solutions of a non-divergent nonlinear parabolic system describing the processes of combustion, "O'zMU xabarlari", 2025, 2/2-1. Aniq fanlar, 94–102 p.

(13). Aripov M., Bobokandov M.M. Blow-up analysis for a doubly nonlinear parabolic non-divergence form equation with source term. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2022, vol. 5, 4, ISSN-2181-9483.

(14). Khaydarov A., Begulov U.U. Self-similar solution of a parabolic equation in divergence form with a source and double nonlinearity. Computational technologies. 2026, v. 31, № 1, p. 66–75.

(15). Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J O. Global solvability and explicit estimation of solutions of a cross-di usion parabolic system in non-divergent form with a source and variable density. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2022, vol. 5, 4, ISSN-2181-9483.

Жувонов Камариддин Ризокулович (Ассистент кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»; Преподаватель Ташкентского филиала Самаркандского государственного университета ветеринарной медицины, животноводства и биотехнологий; e-mail: Qamariddin.j@mail.ru),
Мехмонов Озодбек Гофурович (Базовый докторант Бухарского государственного университета; e-mail:Mehmonovozodbek739@gmail.com),
Жураев Турсунбой Файзиевич (Профессор кафедры математики Узбекского национального педагогического университета имени Низами; e-mail: Tursunzhuraev@mail.ru)

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, ЯВЛЯЮЩИХСЯ МНОГООБРАЗИЯМИ РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Аннотация. *Исследуются геометрические и топологические свойства различных гомотопических плотных подмножеств, являющихся многообразиями различной размерности компакта $P(X)$. В работе доказано, что подпространства вида $P_n(X)\backslash P_{n-1}(X)$ (при $n > 1$) являются евклидовыми многообразиями размерности $n-1$. С помощью построения специальных гомотопий установлена гомотопическая плотность исследуемых подмножеств и проанализированы их геометрические свойства как Z-множеств в смысле Шори и Андерсона. Также показано, что для любого бесконечного компакта пространство вероятностных мер $P(X)$ удовлетворяет аксиоме отделимости S_4. Полученные результаты вносят вклад в теорию ковариантных функторов, подтверждая высокую степень топологической однородности структуры $P(X)$ и её естественных подпространств. В частности, обосновано, что пространство мер с конечными носителями $P_\omega(X)$ является абсолютным ретрактом (AR).*

Ключевые слова: *вероятностные меры, гомотопически плотно, многообразия, Z −множество.*

EHTIMOLLIK O‘LCHOVLARI FAZOSINING TURLI O‘LCHAMLI KO‘PXILLIKLAR BO‘LGAN QISM FAZOLARI HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu ishda P(X) kompaktining turli o‘lchamli ko‘pxilliklar bo‘lgan har xil gomotopik zich qism to‘plamlarining geometrik va topologik xossalari tadqiq qilingan. Tadqiqotda $P(X)$ kompaktining $P_n(X)\backslash P_{n-1}(X)$ ko‘rinishidagi qism fazolari $n-1$ o‘lchamli Evklid ko‘pxilliklari ekanligi isbotlandi. Ishda qurilgan maxsus gomotopiyalar yordamida ushbu qism to‘plamlarning gomotopik zichligi va ularning Z-to‘plam xossalari tahlil qilindi. Shuningdek, nol o‘lchamli kompaktlar uchun ehtimollik o‘lchovlari fazosining S_4 ajratish aksiyomasini qanoatlantirishi ko‘rsatib berildi. Olingan natijalar cheksiz o‘lchamli topologiya va kovariant funktorlar nazariyasidagi ochiq masalalarni hal etishda muhim ahamiyatga ega. Xususan, $P_\omega(X)$ qism fazosining absolut retrakt (AR) ekanligi va uning geometrik tuzilishi bo‘yicha yangi xulosalar shakllantirildi.*

Kalit so‘zlar: *ehtimollik o‘lchovlari, gomotopik zich, ko‘pxilliklar, Z-to‘plam.*

ON SUBSPACES OF THE SPACE OF PROBABILITY MEASURES WHICH ARE MANIFOLDS OF VARIOUS DIMENSIONS

Annotation. *The geometric and topological properties of various homotopically dense subsets that are manifolds of various dimensions of the P(X) compactum are investigated. The study demonstrates that the subspaces of the $P(X)$ compactum, specifically $P_n(X)\backslash P_{n-1}(X)$, form $(n-1)$-dimensional Euclidean manifolds. By constructing explicit homotopies, the research analyzes the homotopic density and Z-set properties of these subsets. Furthermore, it is established that the space of probability measures for zero-dimensional compacta satisfies the S_4 separation axiom. These findings contribute significantly to infinite-dimensional topology and the theory of covariant functors. Specifically, new insights into the geometric structure and Absolute Retract (AR) properties of the $P_\omega(X)$ subspace are provided.*

Keywords. *Probability measures, homotopically dense, manifolds, Z-set.*

Введение. Для компактов X имеется простая топологическая классификация пространств $P(X)$ всех вероятностных мер. В случае конечного n −точечного пространства X через $\{n\}$ обозначается дискретное пространство $\{0,1,2,\dots,n-1\}$, т.е., $\{n\}=\{0,1,2,\dots,n-1\}$-точки μ пространства $P(\{n\})=P_n(\{n\})$, которые являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака:

$$\mu = m_0\delta(0)+m_1\delta(1)+\dots+m_{n-1}\delta(n-1)$$

Поэтому они естественно отождествляются с точками $(n-1)$ −мерного симплекса σ^{n-1}. При этом меры Дирака $\delta(i)$ образуют вершины симплекса, a массы m_i, помещенные в точки i, являются барицентрическими координатами меры μ. Таким, образом, компакт $P(n)$ аффинно гомеоморфен симплексу σ^{n-1}.

В случае бесконечного компакта X, пространство $P(X)$ также является компактом (P сохраняет вес). Далее оно, содержа симплексы сколь угодно большого числа измерений, бесконечномерно. По теореме Кэли выпуклый компакт $P(X)\subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в гильбертово пространство ℓ_2. Следовательно, по теореме Келлера компакт $P(X)$, как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в ℓ_2., гомеоморфен гильбертову кубу $Q=I^{\aleph_0}$[3], т.е., для бесконечного компакта X, компакт $P(X)\simeq Q$. С другой стороны пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на компакте X называется множеством всех регулярных борелевских вероятностных мер на X, снабженное слабейшей из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u\colon C(X)\to R$, переводящей меру μ в $\mu(U)$ (U открытое в X множество).

Также известно, что любое пространство всех вероятностных мер $P(K^{\aleph_1})$, $\aleph_1$-степени неодноточечного компактного открыто-порожденного K гомеоморфно тихоновскому кубу $I^{\aleph_1}$, т.е. $P(K^{\aleph_1})=I^{\aleph_1}$, I −отрезок $[0,1]$. Отметим, в частности, что все эти пространства являются топологически однородными. А для пространств $P(K^{\aleph_1})$ при $\tau>\aleph_1$ ситуация иная [10].

Для произвольного компактного пространства X и меры $\mu\in P(X)$ определен ее носитель $\mathrm{supp}(\mu)$– это наименьшее из замкнутых множеств $F\subset X$, для которых $\mu(F)=\mu(X)$, т.е. $\mathrm{supp}(\mu)=\bigcap\{A\colon A=\bar{A},\mu\in P(A)\}$; Через

$P_n(X)=\{\mu\in P(X)\colon|\mathrm{supp}\mu|\le n\}$ обозначим множество всех мер μ с носителями мощность которых не превосходит n. Через $P_\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n(X)$ −множество всех вероятностных мер μ с конечными носителями.

Следовательно, подпространства $P_\omega(X)$ σ −компактно и $P_\omega(X)$ всюду плотно в выпуклом компакте $P(X)$.

$Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1,1]_i$ – гильбертов куб[14], $W_i^{\pm} = \{g_i \in Q: g_i = \pm 1\}$ - i-ая грань куба, $BdQ = \cup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$ -псевдограница куба Q, а $s = Q \backslash BdQ$ - псевдовнутренность куба Q. ℓ_2 -сепарабельное гильбертово пространство, Σ - линейная оболочка стандартного кирпича $Q' = \prod_{i=1}^{\infty} [0, \frac{1}{2^i}]$ в гильбертовом пространстве ℓ_2, через ℓ_2^f обозначается линейное подпространство ℓ_2, состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отличны от нуля. По теореме Андерсона-Кадеца гильбертово пространство ℓ_2 гомеоморфно S. Из результатов Бессаги-Пелчинского, следует, что Σ гомеоморфно $rint\ Q$ [11-12], где $rintQ = \{x = (x_n) \in Q: |x_n| < t < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что $rint\ Q \simeq BdQ$ и $BdQ \simeq \Sigma$ [4,14]. Нужно также представить ℓ_2 и ℓ_2^f.

Терминология и обозначения, встречающиеся в тексте, общепринятые и взяты из [1-4]. Определения недостающих понятий и фактов можно найти в работах [5;13 с.].

Анализ литературы. Исследование топологии пространств вероятностных мер было заложено в работах В.В. Федорчука и А.Ч.Чигогидзе [8]. Важный вклад в изучение геометрических свойств подфункторов вероятностных мер внес Т.Ф.Жураев [4], исследовавший поглощающие множества в бесконечномерных многообразиях. Также в работе использованы фундаментальные результаты К. Борсука по теории ретрактов [7] и современные исследования размерностных свойств граничных множеств [10].

Методология исследования. В работе используются методы общей топологии, теории бесконечномерных многообразий и теории ретрактов. Основной упор сделан на аппарат гомотопической плотности и свойства Z-множеств в смысле Шори и Андерсона. Рассматриваются конструкции подпространств $P_A(X)$, где A – подмножество X, и анализируется их вложение в $P(X)$.

Анализ и результаты.

§ 1. Расположенности подпространств пространства $P(X)$ и их ретрактные свойства.

Пусть X бесконечный компакт.

Предложение 1. Пусть $A \subset X$ замкнуто и $A \neq X$. Тогда $P(A)$ есть Z −множество в $P(X)$.

Доказательство. В силу бесконечности X пространство $P(X) \simeq Q$. Возьмем точку $x_0 \in X \backslash A$. Построим гомотопию $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot \delta_{x_0}$, где δ_{x_0} −мера Дирака. В этом случае, если $z = 0$, то $h(\mu, 0) = (1-0)\mu + 0 \cdot \delta_{x_0} = \mu$. т.е. $h(\mu, 0) = id_{P(X)}$.

Если $t \in (0,1]$, то $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot \delta_{x_0}$. т.е. Мера $h(\mu, t) \in P(X) \backslash P(A)$ и $h(\mu, t)\ \overline{\in}\ P(A)$. Это означает, что подпространство $P(X) \backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$. В этом случае компакт $P(A)$ гомотопически пренебрежимо (ничтожно), то по теореме 1.4.4 [5] компакт $P(A)$ есть Z −множество в $P(X)$.

Из доказательства предложения 1, в частности вытекает

Следствие 1. Для любого собственного замкнутого подмножества A компакта X, подпространство $P(X) \backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

В силу результатов лемма 2.1 [4] для любого собственного подмножества A компакта X имеет место равенство

$$P(X \backslash A) = P(X) \backslash S_P(A) \quad (1)$$

Для любого собственного подмножества $Y \subset X$, в силу выпуклости и локальной выпуклости пространств $P(Y)$ и $S_P(Y)$, они являются AR пространствами. Известно, что каждое AR пространство есть стягиваемое ANR пространство.

Предложение 2. Для любого собственного подмножества Y компакта X подпространство $S_P(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Доказательство. Пусть X произвольный компакт и $Y \subset X$. Выберем точку $x_0 \in X \backslash Y$. Искомую гомотопию $h(\mu, t): P(X) \times [0,1] \to P(X)$ построим пологая $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot \delta_{x_0} = \mu$. т.е. $h(\mu, 0) = id_{P(X)}$. Если $t \in (0,1]$, то носители $\mathrm{supp} h(\mu, t)$ меры $h(\mu, t)$ пересекаются с множество $Y \cup \{x_0\}$ т.е. меры $h(\mu, (0,1]) \in S_P(Y)$. Это означает, что подпространство $S_P(Y)$гомотопически плотно в $P(X)$.

Для произвольного компакта X и собственного подмножества $Y \subset X$ положим

$$S_P(Y) = \{\mu \in P(X): supp\mu \cap Y \neq \emptyset\}$$

В силу полунепрерывности снизу отображения $supp_P(\mu): P(X) \to \exp X$, подпространство $S_P(Y)$ открыто в $P(X)$, если Y открыто в X. Заметим, что подпространство $S_P(Y)$ всюду плотно в

$P(X)$. т.е. $S_P(Y) = P(X)$. С другой стороны, для любого собственного подпространства $Y \subset X$ имеет место $P(Y) \subset S_P(Y)$.

Предложение 3. Для любого собственного подмножества $Y \subset X$ пространство $S_P(Y)\backslash P(Y)$ гомотопически плотно в $S_P(Y)$.

Доказательство. Пусть Y есть собственное подмножество компакта X. Тогда $X\backslash Y \neq \emptyset$ возьмем меру $\mu_0 \in S_P(Y)\backslash P(Y)$ или $x_0 \in X\backslash Y$. Искомую гомотопию $h(\mu,t)\colon S_P(Y) \times [0,1] \to S_P(Y)$ построим пологая $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot \delta_{x_0}$ или $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot \mu_0$. Очевидно, что $h(\mu,0) = (1-0)\mu + 0 \cdot \mu_0$ (или $(1-0)\mu + 0 \cdot \delta_{x_0}) = \mu$, т.е. $h(\mu,0) = id_{S_P(Y)}$. Если $t \in (0,1]$, то мера $h(\mu,t)$ целиком не лежит в $P(Y)$. т.е. $h(\mu,(0,1]) \subset S_P(Y)\backslash P(Y)$.

Предложение 4. Для любого собственного замкнутого подмножества $A \subset X$ компакта X, существует ретракция $r\colon P(X) \to P(A)$ ε −близкая к $id_{P(X)}$.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт и A его собственное подмножество. По предложению 1 компакт $P(A)$ есть Z −множество. Это обозначает, что существует отображение $f\colon P(X) \to P(A)$ ε − близкая к $id_{P(X)}$отображение, где $P(A)$ выпукло. Этом случае существует ретракция $R\colon P(X) \to P(A)$. В данном случае существует окрестность $O(P(A))$ такая, что для любого $x \in O(P(A))$ $\rho(x,R(x)) < \varepsilon$. Пусть $\varphi\colon P(X) \to [0,1]$ такая непрерывное отображение, что $\varphi(P(A)) = 1$, $\varphi(P(X)\backslash O(P(A))) = 0$.

Теперь через $r\colon P(X) \to P(A)$ получаем $r(\mu) = \varphi(\mu) \cdot R(\mu) + (1-\varphi(\mu))f(\mu)$.

Тогда $\|\mu - r(\mu)\| \leq \varphi(\mu)$, $\|\mu - R(\mu)\| + (1-\varphi(\mu)) \cdot \|\mu - f(\mu)\| \leq \varepsilon$.

Определение. [6]. Выпуклое подмножество является полупространством (half-spaces), если его дополнение выпукло. Пространство X называется «выпуклой структурой», состоящей из множеств X , и G семейство (субъект) «выпуклых» подмножеств удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\emptyset$ и X выпукло;

(2) пересечение семейства выпуклых множеств выпукло;

(3) объединение растущего семейства выпуклых множеств выпукло.

Пространство X выпуклой структурой удовлетворяет аксиоме отделимости S_4: если для двух непересекающихся выпуклых подмножеств C, D имеется полупространство H такое, что $C \subset H$, $D \subset X\backslash H$.

Вопрос. Для любого компакта X пространство $P(X)$ удовлетворяет ли аксиоме отделимости S_4 ?

Из равенства (1) вытекает, что для любого собственного подмножества $A \subset X$ компакта X пространства $P(A)$, $S_P(A)$ являются полупространствами, и $P(X\backslash A)$ и $S_P(A)$ тоже являются полупространствами пространства $P(X)$. Заметим, что для любого собственного замкнутого подмножества $A \subset X$ подпространства $P(A)$ и $P(X)\backslash P(A)$ тоже являются полупространствами в $P(X)$.

Если $C \subset P(X)$ и $D \subset P(X)$, и $C \cap D = \emptyset$, то $P(X)\backslash C \cup P(X)\backslash D = P(X)$. В этом случае можем считать, что существует замкнутое собственное подмножество $A \subset X$, что подпространство $P(A) \supset P(X)\backslash C$. Тогда $P(X)\backslash P(A)$ выпуклом $D \subset P(X)\backslash P(A)$.

Значит, для любого бесконечного компакта X пространство $P(X)$ удовлетворяет аксиоме отделимости S_4. т.е. верно следующее

Предложение 5. Для любого бесконечного компакта X пространство $P(X)$ удовлетворяет аксиоме отделимости S_4.

Заметим, что для любого бесконечного компакта X, семейство $G_P(X) = \{S_P(A)\colon A \in expX\}$ образуют выпуклую структуру на компакте $P(X)$.

Определение [7]. Ретракция $r\colon X \to Y$ называется деформационной, если существует такая гомотопия $H(x,t)\colon X \times [0,1] \to X$, что $H(x,0) = x$, $H(x,1) = r(x)$ для всех $x \in X$, а Y– называется деформационным ретрактом пространства X.

Предложение 6. Для любого бесконечного компакта X и любого собственного замкнутого подмножества A подпространство $P(A)$ есть деформационный ретракт компакта $P(X)$.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт и A замкнуто в X, где $A \neq X$. В этом случае $P(X) \cong Q$ и $P(A)$ компакт и $P(A) \in AR$. В этом случае в силу замкнутости множества A в X существует ретракция $r\colon P(X) \to P(A)$. Построим гомотопию $h(\mu,t)\colon P(X) \times [0,1] \to P(X)$ полагая $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu)$. Заметим, если $h(\mu,0) = (1-0)\mu + 0 \cdot r(\mu) = \mu$, $h(\mu,1) = (1-t)\mu +$

$1 \cdot r(\mu) = r(\mu) \in P(A)$. Это означает, что подпространство $P(A)$ есть деформационный ретракт всего пространства $P(X)$.

С другой стороны, если X бесконечный компакт, то $P(X)$ состоит из двух выпуклых подмножеств $P_w(X)$ и $P(X)\backslash P_w(X) = CP_w(X)$. Выпуклые подмножества $P_w(X)$ и $CP_w(X)$ имеют бесконечной размерности.

Далее, для любого собственного подмножества $A \subset X$ компакт $P(X)$ состоит из объединения выпуклых подмножеств $P(A)$ и $P(X)\backslash P(A)$. В случае бесконечности компакта X из равенства $P(X\backslash A) = P(X)\backslash S_p(A)$ вытекает, что $P(X)$ есть объединение выпуклых подпространств $P(X\backslash A)$ и $S_p(A)$.

Определение [7]. Ретракция $r: X \to Y$ называется сильно деформационной, если существует такая гомотопия $H(x,t): X \times [0,1] \to X$, что $H(x,0) = x$, $H(x,1) = r(x)$ для всех $x \in X$, а кроме того, $H(y,t) = y$ для всех $y \in Y$ и для всех $t \in [0,1]$.

Предложение 7. Для любого бесконечного компакта X любое компактное собственное подмножество A компакта $P(X)$ является его сильным деформационным ретрактом.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт и $A \subset P(X)$, A выпукло в $P(X)$. Тогда A есть ретракт, т.е. $A \in AR$. В этом случае имеется непрерывная ретракция $r: P(X) \to A$ оставляющий точки множества A неподвижным.

Непрерывную гомотопию $H(\mu,t): P(X) \times [0,1] \to P(X)$ построим, полагая $H(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu)$

Если $t = 0$, то $H(\mu,0) = \mu$ т.е. $H(\mu,0) = id_{P(X)}$.

Если $t = 1$, то $H(\mu,1) = r(\mu)$ для всех $\mu \in P(X)$.

В силу выпуклости множества $A \subset P(X)$ и в силу ретракции $r(\mu): P(X) \to A$ для всех $\mu \in A$ и для всех $t \in [0,1]$, тогда $H(\mu,t) = \mu$.

Значит, собственное выпуклое подмножество $A \subset P(X)$ компакта $P(X)$ является его сильным деформационным ретрактом.

В работе [14] было показано, что для любого собственного подмножества $A \subset X$ бесконечного компакта X имеет место:

1. $S_p(A)$ гомеоморфно ℓ_2, т.е. $S_p(A) \simeq \ell_2$;

2. Если $X\backslash A$ всюду плотно в X, то $P(X\backslash A)$ есть граничное множество в $P(X)$ т.е. $P(X)\backslash P(X\backslash A) \simeq \ell_2$;

3. Если $X\backslash A$ всюду плотно в X и $P(X\backslash A)$ содержит гильбертов куб Q, то $P(X\backslash A) \simeq \Sigma$;

4. Если $X\backslash A$ всюду плотно в X и $P(X\backslash A)$ не содержит гильбертов куб Q, то $P(X\backslash A) \simeq \ell_2^f$.

5. Для любого счетного собственного всюду плотного подмножества $X_0 \subset X$ подпространство $P(X_0) \simeq \ell_2^f$.

6. Пространство $S_p(A)$ обладает компактным Z-свойством т.е. любое компактное подмножество пространства $S_p(A) \simeq \ell_2$;

7. Пространство $P(X\backslash A)$ обладает компактным Z-свойством;

8. Пространство $P(X\backslash A) \times P(X) \simeq \Sigma$;

9. Для любого счетного собственного подмножества X_0 компакта X, пространство $P(X_0) \times P(X) \simeq \Sigma$.

§2. Гомотопические свойства пространства $P(X)$ для компакта X размерности ноль т.е. $dimX = 0$

Пусть X компактное пространство и $dimX = 0$. Тогда X состоит из конечно числа точек и X есть бесконечное множество.

а) если X конечно т.е. $|X| = n+1$. Множество X состоит из $n+1$ точек $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, тогда $P(X)$ есть замкнутый симплекс $T^n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ размерности n. т.е. $dimT^n(a_0, a_1, \dots, a_n) = n = \sigma^n$. Через $T^n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ обозначаем его внутренность. Точки $x \in T^n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ можно записать в виде $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. Числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются барицентрическими координатами точки x и обозначается $x(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Множество $T^n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ всех точек $x \in T^n(a_0, a_1, \dots, a_n)$, барицентрические координаты которых положительны, назовем открытым симплексом с вершинами $a_0, a_1, \dots, a_n$ или внутренности замкнутого симплекса $T^n(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Если $X_0 \subset X$, $X_0 \neq X$, то симплекс $T(X_0)$ (соответственно, $T(X)$) называется гранью симплекса $T^n(X) = T^n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ (соответственно, $\pi_k == \psi_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$).

Открытый симплекс не пересекается со своими гранями, замкнутый их содержит. Объединение всех граней называется границей симплекса.

Значит, $P(X)$ есть замкнутый симплекс $T^n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sigma^n$ размерности n, натянутые на точки $a_0, a_1, \dots, a_n$.

1^0. Если A собственное подмножество компакта X, подпространство $P(A)$ является гранью симплекса $P(X)$ и является Z-множеством в $P(X)$. Заметим, что граница $T^n(x_0, x_1, \dots, x_n) \setminus T^n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \partial T^n(x_0, \dots, x_n)$ есть Z-множество, как конечное объединение Z-множеств. Для любого собственного подмножества $A \subset X$.

2^0. Пусть A собственное подмножество компакта X. Рассмотрим множество подмножество $S_p(A)$. Очевидно, что $S_p(A) = P(X) \setminus P(X \setminus A)$, где $P(X \setminus A)$ грань симплекса $P(X)$. Заметим, что $S_p(A)$ всюду плотно в $P(X)$, т.е. $\overline{S_p(A)} = P(X)$. С другой стороны, $S_p(A) \in AR$ и $P(X) \in AR$.

3^0. Имеет место верно равенство: $P(X \setminus A) = P(X) \setminus S_p(A)$.

4^0. Внутренность $T^n(x_0, \dots, x_n)$ симплекса $T^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ гомотопически плотно в $T^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Искомую гомотопию положим $H(\mu, t)\colon P(X) \times [0,1] \to P(X)$ построим полагая $H(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot b(T^n)$, где $b(T)$ – барицентр симплекса $T^n(x_0, \dots, x_n)$. т.е. $b(T) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} a_i$.

5^0. Внутренность $T^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ симплекса $T(x_0, x_1, \dots, x_n)$ гомеоморфно евклидову пространству R^n размерности n. т.е. $T^n(x_0, x_1, \dots, x_n) \simeq R^n$.

6^0. Заметим, что $\bigcap_{i=0}^{n} S_p(x_i) = T^n(x_0, \dots, x_n) \simeq R^n$. $P(X) \setminus \bigcap_{i=0}^{n} S_p(x_i) = \bigcup_{i=0}^{n} (P(X) \setminus S_p(x_i)) = \partial T^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

б) Пусть теперь X бесконечный компакт и $dim X = 0$. Извечтно, что в этом случае, компакт гомеоморфно $P(X)$ гомеоморфно Q, т.е. $P(X) \simeq Q$.

Предложение 8. Для любого собственного замкнутого подмножества $A \subset X$ компакта X существует непрерывная открытая ретракция $P(f)\colon P(X) \to P(A)$.

Доказательство. Пусть X компакт размерности ноль (т.е. $dim X = 0$) и $A \subset X$ замкнуто в X. По предложению 5.3.3 [2] всякое замкнутое подмножество A компакта X размерности нуль является ретрактом, по этому существует ретракция $r_A^X\colon X \to A$.

В работе [1] показано, что если ретракт любого метрического компакта есть открытое отображение, поэтому ретракция $r_A^X\colon X \to A$ есть открытое отображения функтор P вероятностных мер открытый функтор, т.е. функтор P переводит открытое отображение в открытое. Значит, отображение $P(r_A^X)\colon P(X) \to P(A)$ открытая ретракция.

С другой стороны, если A собственное замкнутое подмножество компакта X, то $P(A) \subset P(X)$ и $P(A)$ есть абсолютный ретракт в $P(X) \simeq Q$, т.е. $P(A) \in AR$. В этом случае существует ретракция $R\colon P(X) \to P(A)$).

Если $dim X = 0$, то по результатам работы [3,4] $dim P_n(X) \leq n dim X + n - 1 = n - 1$ т.е. $dim P_n(X) = n - 1$. При $n = 1$, пространство $P_1(X) \simeq \sigma(X)$ меры Дирака гомеоморфно пространству X.

Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ и бесконечного компакта X размерности ноль, пространство (компакт) $P_n(X)$ имеет размерность $\dim P_n(X) = n - 1$.

Предложение 9. Для любого n подпространство $P(X) \setminus P_n(X)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт, тогда $P(X) \simeq Q$ и $\dim P_n(X) = n - 1$.

Искомую гомотопию $H(\mu, t)\colon P(X) \times [0,1] \to P(X)$ построим, полагая: $H(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0$, где $\mu_0 \in P(X) \setminus P_n(X)$ и $|\mathrm{supp}\mu_0| = 2n + 1$.

Заметим, что если $t = 0$, то $H(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu$, т.е. $H(\mu, 0) = id_{P(X)}$.

Если $t \in (0,1]$, то мера $h(\mu, t) \notin P_n(X)$, так как носитель $\mathrm{supp} h(\mu, t)$ меры $h(\mu, t)$ содержит более чем $n + 1$ точек, т.е. $h(\mu, (0,1]) \in P(X) \setminus P_n(X)$.

Значит, подпространство $P(X) \setminus P_n(X)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

В работе [4] было доказано, что для любого бесконечного компакта X и для любого $n \in \mathbb{N}$, компакт $P_n(X)$ есть Z-множество в $P(X)$. Подпространство $P_\omega(X)$ есть $\sigma - Z$-множество в $P(X)$ и $P_\omega(X)$ всюду плотно в $P(X)$ [4]. А также для любого бесконечно компакта X показано что $P_\omega(X) \simeq \ell_2^f$, обладает компактным Z-свойство и $P(X) \setminus P_\omega(X)$ гомеоморфно гильбертовому пространству

ℓ_2[4]. Заметим, что в данном случае подпространство $P_\omega(X)$ выпуклом и локально выпукло. Следовательно, $P_\omega(X)$ есть абсолютный ретракт, т.е. $P_\omega(X) \in AR$.

Далее, подпространство $P(X)\backslash P_\omega(X)$ тоже выпукло. В данном случае имеет место

Предложение 10. Для любого бесконечного компакта X пространства $P_\omega(X)$ и $P(X)\backslash P_\omega(X)$ являются выпуклыми полупространствами.

Как предложение 8 доказывается следующая

Предложение 11. Для любого бесконечного компакта X подпространство $P(X)\backslash P_\omega(X)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Предложение 12. Для любого собственного замкнутого подмножества A компакта бесконечного X, компакт $P_n(A)$ есть Z-множество в $P_\omega(X)$.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт, A его собственное замкнутое подмножество. Тогда для любого $n \in N$ множество $P_n(A)$ замкнуто в $P_n(X)$. Следовательно, компакт $P_n(A)$ в $P_\omega(X)$. В силу результатов работы [4] множество $P_n(A)$ есть Z-множество в $P_\omega(X)$. С другой стороны пространство $P_\omega(X)$ обладает компакт Z-свойством. Следовательно, компакт $P_n(A)$ есть Z-множество в $P_\omega(X)$.

Предложение 13. Для любого собственного подмножества A компакта X существует ретракция $P_n(r)\colon P_n(X) \to P_n(A)$ являющего 0-мягким отображением.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт размерности ноль, т.е. $dimX = 0$ и $A \subset X$ собственное замкнутое подмножество. По предложению 5.33 [2] всякое замкнутое подмножество A компакта X размерности ноль является его ретрактом, т.е. существует непрерывная ретракция $r_A^X\colon X \to A$.

В работе [1] показано, что ретракт любого метрического компакта X есть открытое отображение, поэтому ретракция $r_A^X\colon X \to A$ есть открытое отображение. Теперь рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{c} P_n(r_A^X)\colon P_n(X) \to P_n(A) \\ h \uparrow \nwarrow k \ \uparrow \ q \\ F \ \subset \ \mathbb{Z} \end{array} \qquad (2)$$

где Z - метрический компакт размерности ноль, т.е. $dimZ = 0$, множество F замкнуто в Z и диаграмма (2) коммутативно. По предложению 5.33 [2] существует $r_F^Z\colon \mathbb{Z} \to F$. Так как r_F^Z есть ретракция, поэтому $h \circ r_F^Z = k\colon Z \to P_n(X)$ и $P_n(r_A^X) \circ k = q$ отображение оставляет диаграмму (2) коммутативной. Это означает, что отображение $P_n(r_A^X)\colon P_n(X) \to P_n(A)$ 0-мягко.

В работе [10] имеется следующее

Предложение 1.2.24 [10]. Следующие условия эквивалентны для любого отображения $f\colon X \to Y$ между польскими пространствами:

1) f - открытая сюръекция;

2) f - 0-мягкое отображение.

Поэтому отображение $P_n(r)\colon P_n(X) \to P_n(A)$ 0-мягко.

Предложение 14. Для любого собственного замкнутого подмножества $A \subset X$ бесконечного компакта X размерности ноль, существует ретракция $r\colon P_\omega(X) \to P_\omega(A)$ ε-близкая к $id_{P_\omega(X)}$.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт, $dimX = 0$ и $A \subset X$ собственное замкнутое подмножество данном случае, по предложению 5.33 [2] всякое замкнутое подмножество A компакта X размерности ноль, его ретрактом т.е. существует непрерывная ретракция $r\colon X \to A$. В силу непрерывности ретракции r и нормальности функторов P, P_n и всюду плотности подпространства $P_\omega(X)$ в пространстве $P(X)$ для любого бесконечного компакта X имеет место двойное равенство:

$$P(r)|_{P_\omega(X)} = P_\omega(r)|_{P_n(X)} = P_n(r)\colon P_n(X) \to P_n(A).$$

С другой стороны, $P(A)$ есть Z-множество в $P(X)$, $P_n(A)$ есть Z-множество $P(X)$ и $P_n(A)$ есть Z-множество в $P_\omega(X)$. По предложение 1 компакт $P_n(A)$ есть Z-множество в $P(X)$. Но означает, что существует отображение $f_\varepsilon\colon P(X) \to P(A)$ ε-близкое к $id_{P(X)}$. В этом случае, имеется ретракция $R = P(r)\colon P(X) \to P(A)$ и $P(r)|_{P_\omega(X)} = P_n(r)$.

В данном случае существует окрестность $O(P(A))$ такая, что для любого $x \in O(P(A))$ имеем $\rho(\mu, R(\mu)) < \varepsilon$. Пусть $\varphi\colon P(X) \to [0,1]$ такое непрерывное отображение, что $\varphi(P(A)) = 1$ и $\varphi(P(X)\backslash O(P(A))) = 0$. Теперь через $r'\colon P(X) \to P(A)$ полагаем

$$r'(\mu) = \varphi(\mu) \cdot R(\mu) + (1 - \varphi(\mu)) f_\varepsilon(\mu).$$

Тогда

$$\| \mu - r(\mu) \| \leq \varphi(\mu) \| \mu - R(\mu) \| + (1 - \varphi(\mu)) \| \mu - f_\varepsilon(\mu) \| \leq \varepsilon.$$

Заметим, что $r'|_{P_\omega(X)} = r(\mu): P_\omega(X) \to P_\omega(A)$. ■

Теорема 1. Для любого бесконечного компакта X размерности ноль подпространство $P_n(X) \backslash P_{n-1}(X)$ $(n > 1)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$ и является евклидовыми многообразиями размерности n.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт размерности ноль. Известно, что компакт $P_k(X)$ замкнуто в $P_n(X)$, если $k < n$. Очевидно, что пространство $P_{n,k}(X) = P_n(X) \backslash P_k(X)$ открыто в $P_n(X)$.

В данном случае подпространство $P_n(X) \backslash P_{n-1}(X)$ состоит из всех мер μ в пространстве $P_n(X)$ носители которых имеет ровно из n точек.

Возьмем точку $\mu \in P_n(X) \backslash P_{n-1}(X)$ и $supp\mu = \{x_0, \dots, x_n\}$. В данном случае $\mu \in T(\delta_{x_0}, \dots, \delta_{x_n})$. Следовательно, $\mu \notin P_{n-1}(X)$. Отсюда $\mu \in T(\delta_{x_0}, \dots, \delta_{x_n})$, так как барицентрические координаты которых положительны. Множество $T(\delta_{x_0}, \dots, \delta_{x_n})$ есть открытых симплекс размерности $n - 1$, т.е. $dim T(\delta_{x_0}, \delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}) = n - 1$. В качестве окрестности $O(\mu)$ возьмем множество $T(\delta_{x_0}, \delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}) = O(\mu)$. Известно, что $T(\delta_{x_0}, \delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$ гомеоморфно евклидовому пространству R^{n-1}. Значит, подпространство $P_{n,n-1}(X)$ есть R^{n-1} евклидово многообразия. Теперь покажем, что подпространство $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Гомотопию $H(\mu, t): P_n(X) \times [0,1] \to P_n(X)$ построим полагая $H(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot b(\mu)$, где $b(\mu)$ барицентр меры μ. Заметим, мера μ и барицентр этой меры μ, одинаковые множество носители т.е. отрезок $[\mu, b(\mu)]$ целиком в симплексе $T(supp\mu)$.

Если $t = 0$, то $H(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot b(\mu) = \mu$, т.е. $h(\mu, 0) = id_{P_n(X)}$.

Если $t > 0$, то мера $h(\mu, [0,1]) \in P_{n,n-1}(X)$. Это означает, что подпространство $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$.

В работе [11] показано, что для любого бесконечного компакта X конечной размерности (в смысле dim) пространство $P_n(X) \backslash P_{n-1}(X)$ $(n > 1)$ является увклидовыми многообразиями.

Теорема 2. Для любого бесконечного AR компакта X и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует ε-близкая к $id_{P(X)}$ ретракция $r: P(X) \to P_n(X)$.

Доказательство. Пусть $X \in AR$ и X-бесконечный компакт. По предложению 1 для любого $n \in \mathbb{N}$ компакт $P_n(X)$ есть Z-множество в $P(X)$. Это означает, что существует отображение $f_\varepsilon: P(X) \to P(X)$, ε-близкая к $id_{P(X)}$. Из результатов работы [9] для любого $n \in \mathbb{N}$ компакт $P_n(X) \in AR$. В этом случае существует ретракция $R: P(X) \to P_n(X)$. Из $P_n(X) \subset P(X)$ и $P(X) = Q$ по теореме [13] существует окрестность $O(P_n(X))$ такая, что $x \in O(P_n(X))$, $\rho(x, R(x)) < \varepsilon$. Пусть $\varphi(x): P(X) \to [0,1]$ такое непрерывное отображение, что $\varphi(P_n(X)) = 0$, $\varphi(P(X) \backslash O(P_n(X))) = 0$.

Искомую ретракцию $r: P(X) \to P_n(X)$ строим полагая:

$$r(x) = \varphi(\mu)R(\mu) + (1 - \varphi(\mu))f_\varepsilon(\mu)$$

Тогда $\| \mu - r(\mu) \| \leq \varphi(\mu) \| \mu - R(\mu) \| + (1 + \varphi(\mu)) \| \mu - f_\varepsilon(\mu) \| \leq \varepsilon$. Если $f: X \to P(X)$ ε-близко id_X, то отображение $\psi \circ P(f): P(X) \to P(X)$ близко к $id_{P(X)}$. В самом деле, пусть $\lambda \in P^2(X)$ и $\rho^2(\lambda, P(X)) \leq \varepsilon$, тогда $\rho^2(\lambda, \psi(\lambda)) \leq \varepsilon$, где $\psi: P^2(X) \to P(X)$ - ретракция монады [4]. Это следует из того, что ψ не увеличивает расстояние между точками. Значит, r - искомая ретракция.

Подмножество $A \subset X$ называется (сильно) Z_σ-множеством в X, если множество записано в виде $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, каждое A_n является (сильно) Z-множеством в X. Пространство X называется сильно Z_σ-пространством, если само X есть (сильно) Z_σ-множество в X. Пространство X называется со-Z_σ-пространством, если X содержит гомотопически плотное топологические польное подмножество $G \subset X$. Для подмножества $A \subset X$ пространства X через $W(X, A)$ обозначается подмножество: $W(X, A) = \{(x_n) \in X^\omega: x_n \in A$ почти для всех $n\} \subset X^\omega$. т.е. $W(X, A) = \{(x_n) \in X^\omega, n \in N: x_n \in A$ почти для всех $n\}$ [5].

Если $A = \{*\}$, то $W(X,*) = W(X, \{*\})$. Допустим, $X \in AR$ и A гомотопически плотно в X и $* \in A$, то $W(X,*)$ гомотопически плотно в X^ω.

Предложение [5]. Пусть $X \in AR$, $A \subset X$ и $* \in A$.

а) допустим $\bar{A} \neq X$, тогда $W(X, A)$ сильно Z_σ-пространство.

б) допустим, A есть Z_σ-множество в X. Тогда $W(X, A)$ -сильно Z_σ-пространство.

в) допустим, A гомотопически плотно в X и A есть со-Z_σ-пространство. То $W(X,A)$ есть со-Z_σ-пространство.

Имеет место следующие:

1. Для любого компакта (неоднороточечного) X имеем $W(P(X),*)$ гомотопически плотно в $P(X)^\omega$, где $*\in P(X)\backslash P_\omega(X)$.

2. Для любого AR компакта X, $W(P_n(X),*)$ гомотопически плотно в $P_n(X)^\omega$, где $*\in S_{P_n}(A)$.

3. $W(P_\omega(X), A=\{\mu_i: i\in\mathbb{N}\})$ сильно Z_σ-пространство, где A счетно, но не плотно в $P_\omega(X)$.

4. $W(P(X), P_\omega(X))$ сильно Z_σ-пространство.

5. $W(P(X), A)$ со-Z_σ-пространство, где A - со-Z_σ-пространство в $P(X)$.

Заключение. Исследование показало, что топологическая структура пространства вероятностных мер $P(X)$ обладает высокой степенью однородности. Установлено, что многие естественные подпространства, возникающие в теории мер, являются либо конечномерными многообразиями, либо гомеоморфны гильбертову кубу. Полученные результаты могут быть применены в теории ковариантных функторов и топологической динамике.

Список использованной литературы:

(1). Ayupov Sh.A., Zhuvonov K.R., Zhuraev T.F. Functorial values of compact spaces under the action of some retractively η_F stable covariant on the category Comp. Uzbek Math. Jour. 2024, v. 68, Issue 4, p. 5–16.

(2). Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные структуры. М., МГУ, 1988, 252 с.

(3). Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов. УМН, 1981, т. 36, 3, с. 3–62.

(4). Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов. Канд. дис. М., МГУ, 1989, 90 с.

(5). Banakh T., Radul T., Zarichnyi M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Math. Stud. Monog. Series, v. 1, 1996, VNTL, 232 p.

(6). M. van de Vel. Convex Hilbert cubes in superextensions. Top. Appl. 22, 1986, p. 256–266.

(7). Борсук К. Теория ретрактов. М., “Мир”, 1971, 292 с.

(8). Федорчук В.В., Чигогидзе А.Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М. “Наука”, 1992, 232 с.

(9). Басманов В.Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность. ДАН СССР, 1983, т. 271, 5, с. 1033–1036.

(10). Жураев Т.Ф., Жувонов К.Р. Размерностные свойства подпространств, являющихся граничными множествами пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте Х.Вестн. Томс. Унта, Математика и механика, 2024, т. 89, с. 32–50.

(11). Долгополов М.В., Жураев Т.Ф. О евклидовых многообразиях, являющихся подпространством пространства вероятностных мер с конечными носителями на бесконечном компакте размерности нуль. Вестн. Самарского университета. Естест. серия, 2023, т. 29, 3, с. 3–-36.

(12). Федорчук В.В. Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадических функторов. ДАН СССР, т. 301, 1, с. 41–45.

(13). Чепмэн Т. Лекции о Q – многообразиях М., “Мир”. 1981, 160 с.

(14). Жураев Т.Ф. Топологические свойства гомотопически плотных подпространств компактов вида $F(X)$. Монография, Тошкент, “Методист”, 2025, 164 с.

Аллабергенова Клара Бекиммат кизи (УрГУ, преподаватель кафедры Математического анализа, PhD; klara@urdu.uz)

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ MATHEMATICA К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. *В данной статье представлен систематический обзор возможностей системы Mathematica для вычисления тройных интегралов – от базового повторного интегрирования до продвинутых символических и численных методов. Мы исследуем вычислительный механизм программного обеспечения для точного интегрирования, его численную обработку несобственных и колебательных интегралов, а также мощные инструменты визуализации для понимания областей интегрирования. Особое внимание уделяется выбору оптимальной стратегии – символьной или числовой, выбору системы координат и порядку интегрирования на конкретных примерах из многомерного математического анализа.*

Ключевые слова: *тройной интеграл, цилиндрическая система координат, сферическая система координат, несобственный интеграл, тор.*