[7]. Razzakov A.Sh. Growing of $Ge_{1-x}Sn_x$ solid solutions from the liquid phase. Doklady Akademii Nauk (Rossiya). Vol. 379, № 5, 2001, p. 617–619.

[8]. Saidov A.S., Razzokov A. Sh. Obtaining and morphological studies of epitaxial layers of the $Si_{1-x}Ge_x$ solid solutionю Siberian Physical Journal. 2020б Vol. 15, № 2, p. 84–91. https://doi.org/10.25205/2541-9447-2020-15-2-84–91 .

[9]. С.П.Боцелев, И.Е.Марончук, Ю.Е.Марончук и др. Кристаллизация эпитаксиальных слоев AlGaAs из ограниченного объема раствора-расплава. Неор.материалы., 1977, 13, № 5, с. 769–772.

Турсунова Зулайхо Омонуллаевна (преподаватель, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент, Узбекистан; e-mail: tursunova zulya@mail.ru),
Жабборов Мухаммади Мусурмон угли (преподаватель, Ташкентский государственный педагогический университета имени Низами, Ташкент, Узбекистан; e-mail: Muxammadijm@mail.ru),
Жураев Турсунбой Файзиевич (профессор кафедры «Общей математики» Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами, доктор физико-математических наук, Ташкент, Узбекистан; e-mail: tursunzhuraev@mail.ru)

О ШЕЙПОВЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА $P(X)$

Аннотация. *В данной статье рассматриваются ковариантные подфункторы функтора $P:Comp\to Comp$–вероятностных мер действующие в категории компактов и непрерывных отображений в себя, сохраняющие шейпы бесконечных компактов, шейпы компонент связности и шейповую эквивалентность.*

Ключевые слова: *функтор вероятностных мер, шейп компакта, компонента связности.*

$P(X)$ FAZONING AYRIM QISM FAZOLARINING SHEYP XOSSALARI HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada biz kompaktlar kategoriyasida harakat qiluvchi va cheksiz kompaktlar sheyplarini, bog'lanish komponentlari sheyplarini va sheyp ekvivalentini saqlaydigan o'z-o'ziga uzluksiz akslantirishlar kategoriyasida ishlaydigan Comp–ehtimollik o'chovlarining kovariant subfunktorlarini ko'rib chiqamiz.*

Kalit so'zlar: *ehtimollik o'lchovi funktor, ixcham shakl, bog'langan komponent.*

ABOUT THE SHAPE PROPERTIES OF SOME SUBSPACES OF THE SPACE $P(X)$

Annotation. *In this note, we consider covariant subfunctors of the functor $P:Comp\to Comp$ of probability measures acting in the category of compacta and continuous mappings into itself, preserving the shapes of infinite compacta, shapes of connected components, and shape equivalence.*

Keywords: *functor, probability measures, sheyp compacta, component connected.*
AMS subject classification: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54O30.

Введение. Для компактов X через $P(X)$ обозначаются пространства вероятностных мер [1,2]. Известно, что в бесконечном компакте X, это пространство $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q [1]. Для натурального числа $n\in N$ через $P_n(X)$ обозначается множество всех вероятностных мер не более чем с n носителями т.е. $P_n(X)=\{\mu\in P(X):|supp\mu|\le n\}$. Компакт $P_n(X)$ является выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака вида: $\mu=m_1\delta_{x_1}+m_2\delta_{x_2}+\ldots+m_n\delta_{x_n}$, $\sum_{i=1}^{n}m_i=1, m_i\ge 0, x_i\in X, \delta_{x_i}-$ мера Дирака в точке x_i. Через $\delta(X)$ обозначается множество всех мер Дирака. Напомним, что пространство $P_f(X)\subset P(X)$, состоит из всех вероятностных мер вида $\mu=m_1\delta_{x_1}+m_2\delta_{x_2}+\ldots+m_k\delta_{x_k}$ с конечными носителями, для каждой из которых $m_i\ge\frac{k}{k+1}$ при некотором i [2-3]. Для натурального числа n положим $P_{f,n}\equiv P_f\cap P_n$. Для компакта X имеет место

$P_{f,n}(X)=\{\mu\in P_f(X):|supp\ \mu|\le n\}$; $P_f^c\equiv P_f\cap P^c$, $P_{f,n}^c\equiv P_f\cap P_n\cap P^c$, $P_n^c\equiv P^c\cap P$.

Основная часть. Для компакта X через $P^c(X)$ обозначается множество всех мер $\mu\in P(X)$, носитель каждой из которых лежит в одном из компонентов связности компакта X [1].

Для пространства X через $\square X$ обозначим разложение (разбиение) пространства X состоя-щее из всех компонентов связности [4]. Если $f: X\to Y$ непрерывное отображение, то непре-рывное отображение $\square f: \square X\to\square Y$ однозначно определяется в силу условия $\pi_Y\circ f=\square f\circ\pi_X$, где $\pi_Y: Y\to\square$ Y и $\pi_X: X\to\square$ X-факторные отображения т.е. имеет место следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X\downarrow & & \downarrow\pi_Y \\ \square X & \xrightarrow{\square f} & \square Y \end{array} \qquad (1)$$

Лемма 1. Если X компактное ANR пространство, тогда отображение является $P^c(\pi_X)$ гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пусть X есть ANR - компакт, тогда разложение $\square X$ состоит из конечного числа компонентов. Следовательно, пространство $P^c(X)$ является конечным числом множеств или $P^c(X)$ является конечным объединением гильбертовых кубов или точек. А пространство $P^c(\square X)$ конечное число связных компактов или точек, так как пространство X есть ANR- компакт. Для любого $\mu\in P^c(\square X)$ прообраз $\left(P^c(f)\right)^{-1}(\mu)$ есть гильбертов куб или одна точка т.е. $Sh(\left(P^c(f)\right)^{-1}(\mu))$ тривально, тогда по теореме 7 [5-6] отображение $P^c(f)$ есть шейповая эквивалентность. Следовательно, гомотопическая эквивалентность.

Теорема 1. Пусть X компакт и $\pi_X: X\to\square X$ факторное отображение. Тогда отображение $P^c(\pi_X): P^c(X)\to P^c(\square X)$ порождает шейповую эквивалентность т.е. $Sh\left(P^c(X)\right)=Sh(\square X)$.

Доказательство. Пусть X компактно, $\square X$ тоже компакт и по теореме В.И. Пономарева [7] $\dim\square X=0$. Отсюда $dimP^C\left(\square X\right)=0$ и $Sh(P^c(X))=0$. По теореме 2[6] отображение $P^c(\pi_X)$ является шейповой эквивалентностью, это означает, что $Sh(P^c(X))=Sh\,P^c(\square X)$ и $\left|\square P^c\left(\square X\right)\right|=\left|\square X\right|$.

Определение [1]. Нормальный подфунктор F функтора P_n называется локально выпуклым, если множество $F(\tilde{n})$ локально выпукло, где $\tilde{n}$ есть $n-$точечное множество $\{1,2,...,n\}$.

Скажем, что функтор F_1 является подфунктором (соответственно, надфунктором) функтора F_2, если существует такое естественное преобразование $h: F_1\to F_2$, что для всякого объекта X отображение $h(X): F_1(X)\to F_2(X)$ является мономорфизмом (эпиморфизмом).

Примером, ненормального подфунктора функтора P_n является функтор P_n^C вероятностных

мер, носители которых лежат в одном компоненте связности пространства. Одним из примеров локально выпуклых подфункторов P_n является функтор $SP^n \equiv SP^n_{S_n}$. где S_n – группа гомеоморфизмов (группа перестановок) n – элементного множества.

Следствие 1. Если для компактов X и Y имеет место равенство $|\square X| = |\square Y| = \aleph_0$, тогда $Sh\left(P^c(X)\right) = Sh\left(P^c(Y)\right)$ и $Sh\, P(X) = Sh\, P(Y)$, где $|Z|$- мощность множества Z.

Доказательство. Пусть множества $|\square X|$ и $|\square Y|$ счетны. В этом случае по результату [8], Архангельского пространства $|\square X|$ и $|\square Y|$ компактны и метризуемы. Заметим, что $|\square X|$ и $|\square Y|$ имеют всюду плотное множество изолированных точек. Тогда компакты $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q. С другой стороны $P^c[X] = \square X$ и $P^c[\square Y] = \square Y$. Следовательно, $Sh\, P^c[\square X] = Sh\, P^c[\square Y]$.

Через $M_\square$ обозначим класс таких всех компактов X, что $\square X$ метризуемо. Из следствия 1 вытекает, что если $X, Y \in M_\square$, то $\square X$ и $\square Y$ имеет счетное всюду плотное множество изолированных точек [9].

Следствие 2. Если $X, Y \in M_\square$, тогда $Sh\left(P^c(X)\right) \geq Sh\left(P^c(Y)\right)$ или $Sh(P^c(X)) \leq Sh(P^c(Y))$. Следовательно, если $\square X$ и $\square Y$ бесконечны, тогда $Sh(P^c(X)) = Sh(P^c(Y))$ т.е. $Sh(P^c(X)) \geq Sh(P^c(Y))$ и $Sh\left(P^c(X)\right) \leq Sh\left(P^c(Y)\right)$.

Доказательство. Пусть X и Y есть элементы семейства $M_\square$. Тогда $\square X$ и $\square Y$ нульмерные компакты. В частном случае, если $\square X$ и $\square Y$ конечные множества, то из одной теоремы [10] получаем искомую.

Если $|\square X| \geq \aleph_0$, тогда $\square X$ содержит канторов дисконтиниум. В этом случае $\square Y$ можно вложит в $\square X$, тогда компакт $\square Y$ является ретрактом для $\square X$ [10]. Тогда $Sh(\square X) \geq Sh(\square Y)$ и $ShP^c[\square X] \geq ShP^c[\square Y]$.

Следовательно, по теореме 1 имеем $ShP^c[\square X] \geq ShP^c[\square Y]$. Если $\square X \leq \aleph_0$ и $\square Y \leq \aleph_0$, тогда компакты $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны порядковому компакту Мазуркевича-Серпинского [10]. Последнее, пусть $\square X$ и $\square Y$ бесконечные множества, тогда $Sh(\square X) = Sh(\square Y)$ тогда и только тогда, когда $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны.[11]. Если $|\square X| > |\square Y|$ или $|\square X| < |\square Y|$ тогда $\square Y$ или $\square X$ является ретрактом для $\square X$ и $\square Y$ соответственно. Отсюда по теореме 1 имеем $Sh(P^c(X)) \geq Sh(P^c(Y))$.

Лемма 2. Для любого компакта X имеет место равенство $|\square P_f(X)| = |\square X|$.

Доказательство. Пусть X произвольный компакт, $\square X$ его множество компонентв связности т.е. $\square X = \{x_i' \in X : \pi_X^{-1}(x_i')$ - связная компонента точки $x_i'\}$. Очевидно, что $\square X$ ком-пактно и $\square X \subset X$. Отсюда, $Sh\,(\square X) \leq Sh\,(X)$. С другой стороны из коммутативности диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \pi_X : X & \to & \square X \\ \pi_f^X \uparrow & & \uparrow \delta_X \\ P_f(\pi_X) : P_f(X) & \to & \delta(\square X) \end{array} \qquad (2)$$

$\left|\square ShP_f(X)\right| = \left|\square X\right|$. Из (2) равенство имеет место, т.е. $\left|\square P_f(X)\right| = \left|\square X\right|$. ■

Заметим, для любых $x \in X$ и $y \in Y$ между множествами $(r_f^X)^{-1}(x)$ и $(r_f^Y)^{-1}(y)$ имеется взаимно однозначное соответствие т.е. произвольную точку $\mu_x \in (r_f^X)^{-1}(X)$, ставим в соответствие $\mu_y \in (r_f^Y)^{-1}(X)$, где

$$\mu_x = m_0\delta_{x_0} + m_1\delta_{x_1} + \ldots + m_k\delta_{x_k},\ \mu_y = m_0\delta_{y_0} + \ldots + m_k\delta_{x_k}.$$

В случае бесконечных компактов X и Y, пространства $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q. Если A и B замкнутые множества лежащие в компактах соответственно $P(X)$ и $P(Y)$ есть Z-множества, то в силу теоремы Чепмэна[1], $Sh\,A = Sh\,B$ тогда и только тогда , когда $P(X)\setminus A$ гомеоморфно $P(Y)\setminus B$. В работах [1-2] было показано, что подпространства $F(X)$ и $F(Y)$ есть Z-множества в компактах $P(X)$ и $P(Y)$, где $F = P_f(X), P_{f,n}(X), P^C_{f,n}(X), P^C_f(X)$. Еще было отмечено, что это пространство X является сильным деформационным ретрактом для $F(X)$. Значит имеет место следующие.

Теорема 2. Для бесконечных компактов X и Y следующие условия эквивалентны:

a) $Sh\,X = Sh\,Y$;

b) $P(X)\setminus P_f(X) \simeq P(Y)\setminus P_f(Y)$;

c) $P(X)\setminus \delta(X) \simeq P(Y)\setminus \delta(Y)$;

d) $P(X)\setminus F(X) \simeq P(Y)\setminus F(Y)$, где $F = P^c_{f,n}, P^c_f, P_{f,n}$.

Теорема 3. Пусть X и Y есть элементы множества $M_\square$ т.е. $X \in M_\square$, $Y \in M_\square$ и $\left|\square X\right| > 1$, $\left|\square Y\right| > 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

a) $Sh\,(X) = Sh(Y)$;

b) $P(X)\setminus P^c(X) \simeq P(Y)\setminus P^c(Y)$.

Теорема 4. Пусть X и Y есть элементы множества $M_\square$. Тогда отношение $Sh\,(\square X) = Sh(\square Y)$ тогда и только тогда, когда $Sh\,X = Sh(\square X)$;

Известно, что из $Sh\,X \le Sh\,Y$ вытекает неравенство $Sh\,(\square X) \le Sh(\square Y)$. В частном случае равенство $Sh\,X = Sh\,Y$ дает нам равенство $Sh(\square X) = Sh(\square Y)$.

Пусть теперь $Sh\,(\square X) = Sh(\square Y)$. Из нульмерности и метризуемости компактов $\square X$ и $\square Y$, по теореме Мардещича-Сегала [11] $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны. Если для любого $y \in \square X$ множество $\pi_y^{(-1)}(y)$ имеет тривиальный шейп, тогда по теоремы 7 [5] имеем $Sh\,Y = Sh(\square X)$; В силу нульмерности этих пространств и из равенство $Sh\,Y = Sh(\square X)$ вытекает, что $Y \simeq \square X \simeq \square Y$.

Заметим, что в этом случае $Sh\,X = Sh\,Y$ и $X \simeq Y$.т.е. $Sh\,X = Sh(\square X)$ эквивалентно равенству $Sh\,X = Sh\,Y$.

Теорема 5. Для любых бесконечных нульмерных компактов X и У верны:

а) если $Sh\,X = Sh\,Y$, тогда $P^C_n(X) \simeq P^C_n(Y)$;

б) если $Sh\,X = Sh\,Y$, тогда $P(X)\setminus P^C_n(X) \simeq P(Y)\setminus P^C_n(Y)$;

в) $Sh\,P^C_n(X) = Sh\,P^C_n(Y)$ тогда и только тогда, когда $P(X)\setminus P^C_n(X) \simeq P(Y)\setminus P^C_n(Y)$;

г) $Sh\,F(\mathrm{X}) = Sh\,F(Y)$ тогда и только тогда, когда $P(X)\setminus F(X) \simeq P(Y)\setminus F(Y)$, где F локально выпуклые подфункторы функтора P_n;

д) $Sh\,\mathrm{X} = Sh\,Y$ тогда и только тогда, когда $P(X)\setminus \delta(X) \simeq P(Y)\setminus \delta(Y)$.

Теорема 6. Для любого такого компакта $X \in M_{\square}$, что $|\square X| > 1$, пространство $P(X)\setminus P^{c}(X)$ есть $Q-$многообразия и гомотопически плотно в $P(X)$.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт и $|\square X| > 1$. Для определенности компакт X состоит из компакт связности $X_1, X_2, ..., X_k$. Тогда $P^{C}(X)$ имеет вид $P^{C}(X) = \bigcup_{i=1}^{k} P^{C}(X_i) = \bigcup_{i=1}^{k} P(X_i)$, где X_i замкнутые подмножества компакта X. В силу результатов работы [2], для каждого $i \in \overline{1,k}$ подпространства $P(X_i)$ есть $Z-$множества в $P(X)$. Конечное объединение $Z-$множеств, тоже будет $Z-$множеством. Следовательно $P^{C}(X)$ есть компактное подмножество в $P(X)$, где $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q. Тогда $P(X)\setminus P^{C}(X)$ есть открытое подмножество гильбертова куба Q. Следовательно, $P(X)\setminus P^{C}(X)$ есть $Q-$многообразия. Теперь покажем, что $P(X)\setminus P^{C}(X)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Искомую гомотопию $h(\mu,t): P(X)\times[0,1] \to P(X)$ построим пологая.

$$h(\mu,t) = (1-t)\mu + t\cdot\mu_0,$$

где $\mu \in P(X)$, $\mu_0 \in P(X)\setminus P^{C}(X)$, $t \in [0,1]$. Из $\mu_0 \in P(X)\setminus P^{C}(X)$ вытекает, что носитель меры μ_0 пересекается с каждым $X_i, i = \overline{1,k}$.

Если $t = 0$, то $h(\mu,0) = (1-0)\mu + 0\cdot\mu_0 = \mu$. т.е. $h(\mu,0) = id_{P(X)}$.

Если $t = 1$, то $h(\mu,1) = \mu_0$. т.е. $h(\mu,1) \overline{\in} P(X)\setminus P^{C}(X)$. При любом значение $t \in (0,1]$, этот элемент принадлежит $P(X)\setminus P^{C}(X)$. Это означает, что $P(X)\setminus P^{C}(X)$ гомотопически плотно в $P(X)$ [12].

Пусть X такой бесконечный компакт, что $P_n(X)$ есть $A(N)R$ компакт. т.е. $P_n(X) \in A(N)R$. Тогда в силу [1] вытекает, что $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q.

Из результатов работы [2] вытекает, что $P_n(X)$ есть $Z-$множество в $P(X)$. Очевидно, что $P(X)\setminus P_n(X)$ есть $Q-$многообразия [1].

Допустим, что $P_n(X) \in AR$, тогда существует ретракция $r_{P_n}^{p}(\mu): P(X) \to P_n(X)$

$P_n(X) \subset P_{n+1}(X) \subset ...$

а) $\prod_{n=1}^{\infty} P_n(X) \simeq Q$ тогда и только тогда, если $P_n(X) \in AR$, для любого $n \in N$;

б) $P_1(X) \subset P_2(X) \subset ...$;

$\prod_{n=1}^{\infty} P_n(X) \subset P_{\omega}(X)$, где $P_{\omega}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$;

в) $P(X)\setminus\prod_{n=1}^{\infty}P_n(X)$ есть $Q-$многообразия;

г) $P_\omega(X)\times P(X)\simeq\sum$ [1,2];

д) Если X_0, счетное собственное подмножество в X, то $P_\omega(X_0)\simeq P(X_0)\simeq\ell_2^f$ [1,2];

е) $P_\omega(X)\setminus P_\omega(X_0)\simeq\ell_2^f$.

Для собственного замкнутого подмножества $A\subset X$ положим: $S_P(A)=\{\mu\in P(X):\mathrm{supp}(\mu)\bigcap A\neq\varnothing\}$. Верно равенство: $P(X\setminus A)=P(X)\setminus S_P(A)$.

а) для любых собственных подмножеств A и B компакта X имеет место:

б) $S_P(A)\simeq S_P(B)$;

в) $S_P(A)\times S_P(B)\simeq\ell_2\times\ell_2$, где ℓ_2-гильбертово пространство;

д) $P_\omega(A)\times P(X)\simeq P_\omega(B)\times P(X)$.

Заключение. Изучение шейповых свойств бесконечного метрического компакта при применении ковариантных функторов в рассматриваемой категории сильно востребовано геометрическими задачами. Исследуя шейпы компонентов связности и шейповую эквивалентность бесконечных компактов находится ответ на многие вопросы топологико–геометрического характера.

1. Если X компактное ANR пространство, то отображение $P^c(\pi):P^c(X)\to P^c(\square X)$ является гомотопической эквивалентностью (лемма 1).

2. Если для бесконечных (произвольных) компактов имеет место равенство $|\square X|=|\square Y|=\aleph_0$ тогда $Sh(P^c(X))=Sh(P^c(Y))$ и $Sh(P(X))=ShP(Y)$. (Следствие 1).

3. Для бесконечных компактов X и Y следующие условия эквивалентны:

а) $ShX=ShY$;

б) $P(X)\setminus P_f(X)\simeq P(Y)\setminus P_f(Y)$;

с) $P(X)\setminus\delta(X)\simeq P(Y)\setminus\delta(Y)$;

д) $P(X)\setminus F(X)\simeq P(Y)\setminus F(Y)$, где $F=P_f^c,P_{f,n}^c,P_{f,n}$.

4. Для любого такого компакта $X\in M_\square$, что $|\square X|>1$, пространство $P(X)\setminus P^c(X)$ есть $Q-$многообразия и гомотопически плотно в $P(X)$ (теорема 6).

В дальнейшем в этом направлении изучается вопрос: из равенства шейпов дополнения.

Список использованной литературы:

(1). Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии. Успехи мат. наук, 1991, т. 46, вып 1, с. 41–80.

(2). Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора Р вероятностных мер и его подфункторов. М., МГУ, канд. диссер., 1989, 90 с.

(3). Шепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов. Успех. мат. наук, 1981, т. 36, вып. 3, с. 3–62.

(4). Борсук К. Теория шейпов. М., «Мир», 1976, 188 с.

(5). Mardesic S., Segal J. Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes. Fund. Math. LXXII, 1971, pp. 61–66.

(6). Kodama Y., Spiez S., Watanabe T. On shapes of hyperspaces. Fund. Math. 1978, p, 11; 59–67.

(7). Ponomarev V.I. On continuous decompositions of bicompacta. Uspehi Math. Nauk, 12, 1957, p. 335–340.

(8). Arhangelski A.V. On addition theorem for weight of sets lying in bicompacta. ДАН СССР, 126, 1959, p 239–241.

(9). Pelczynski A. A remark on spaces 2^* for zero dimensional X. Bull. Acad. Polon. Ser.Sci. Math. Astronom. Phys, 19, 1965, p. 85–89.

(10). Mazurkiewicz S., Sierpinski W. Contribition a la topologie des ensembles denombrables Fund. Math. 1920, 1, p. 17–27.

(11). Mardesic S., Segal J. Shapes of compacta and ANR-systems. Fund. Math. LXXII, 1971, p. 41–59.