2. $p = 2$ da global bifurkatsiya, $p \in [2, 2\sqrt{2})$ da barqaror 2-davrli sikl mavjudligi ko‘rsatildi.

3. $p = 2\sqrt{2}$ da davr-3 orbitasi paydo bo‘ladi va Li-York teoremasi asosida tizim xaotik rejimga o‘tadi.

Kelgusida tadqiqotni quyidagi yo‘nalishlarda davom ettirish ko‘zda tutilgan: $a = 1$, $b = -1$ shartlari olib tashlangan umumiy holni o‘rganish; ko‘p o‘lchovli iqtisodiy modellar uchun o‘xshash tahlilni o‘tkazish; xaosni boshqarish usullari – kichik ta’sirotlar yoki teskari aloqa asosidagi barqarorlashtirish metodlarini ishlab chiqish.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

[1]. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. San Francisco, 1982, 460 p.

[2]. Falconer K.J. Julia sets and the Mandelbrot set. Oxford University Press, 2013, 132 p.

[3]. Devaney R.L. The Mandelbrot and Julia Sets. A Toolkit of Dynamics Activities. Key Curriculum Press, 2000, 151 p.

[4]. Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J. Coexistence chaotic behavior on the evolution of populations of the biological systems modeling by three dimensional quadratic mappings. Global and Stochastic Analysis, 2021, vol. 8, № 3, p. 41–45.

[5]. Ganikhodzhaev R., Pirnapasov A. Dynamical systems generated by quadratic homeomorphisms of 2D simplex. Journal of Physics: Conference Series 697, 2016, 012011.

[6]. Seytov Sh.J., Narziyev N.B., Eshniyozov A.I., Nishonov S.N. The algorithms for developing computer programs for the sets of Julia and Mandelbrot. AIP Conference Proceedings. 2023, vol. 2789, № 1, 050021.

Азимов Дониер Бахром угли (Преподаватель кафедры “Прикладная математика и математическая физика”, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; email: doniyor.azimov.97@bk.ru)

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЪЕДИНЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА И КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В ВИДЕ СУММЫ

Аннотация. *В данной работе рассматривается задача интегрирования объединённого уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) и его отрицательного аналога в классе периодических функций. Показано, что для решения этой задачи эффективно применяется метод обратной спектральной задачи. Исследована динамика спектральных характеристик оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, связанного с рассматриваемой моделью. Полученные результаты подтверждают возможность использования методов обратной спектральной теории при интегрировании объединённого уравнения КдФ и КдФ отрицательного порядка в классе периодических функций.*

Ключевые слова: *объединенное уравнение КдФ-КдФоп, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

YIG‘INDI KO‘RINISHIDAGI MOSLANGAN MANBALI NOCHIZIQLI KORTEVEG-DE FRIZ VA MANFIY TARTIBLI KORTEVEG-DE FRIZ TENGLAMALARI UCHUN ARALASH MASALA

Annotatsiya. *Ushbu ishda davriy funksiyalar sinfida Korteveg-de Friz (KdF) tenglamasi va uning manfiy tartibli analogining umumlasghan tenglamasini integrallash masalasi ko‘rib chiqiladi. Mazkur masalani yechishda teskari spektral masala usuli samarali qo‘llanilishi ko‘rsatilgan. Qaralayotgan model bilan bog‘liq bo‘lgan, davriy potensialga ega Shturm-Liuvill operatorining spektral xarakteristikalari dinamikasi tadqiq etilgan. Olingan natijalar davriy funksiyalar sinfida birlashtirilgan KdF tenglamasi va manfiy tartibli KdF tenglamasini integrallashda teskari spektral nazariya usullaridan foydalanish mumkinligini tasdiqlaydi.*

Kalit so‘zlar: *umumlashgan Korteveg-de Friz va manfiy tartibli Korteveg–de Friz tenglamasi, teskari spektral masala, Dubrovin tenglamalari tizimi, izlar formulalari.*

A MIXED PROBLEM FOR THE COMBINED NONLINEAR KORTEWEG-DE VRIES EQUATION AND ITS NEGATIVE-ORDER COUNTERPART WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE IN THE FORM OF A SUM

Annotation. *In this work, the problem of integrating the combined Korteweg-de Vries equation (KdV) equation and its negative-order counterpart in the class of periodic functions is considered. It is*

shown that the inverse spectral method is effectively applied to solve this problem. The dynamics of the spectral characteristics of the Sturm-Liouville operator with a periodic potential associated with the model under consideration are investigated. The obtained results confirm the applicability of inverse spectral theory methods for integrating the combined KdV equation and the negative-order KdV equation in the class of periodic functions.

Keywords: *Combined KdV–negative-order KdV equation, inverse spectral problem, Dubrovin system of equations, trace formulas.*

1. Введение. Интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) впервые была продемонстрирована в 1967 году в работе [1], выполненной американскими учёными К. Гарднером, Дж. Грином, М.Крускалом и Р.Миурой.

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

в классе функций, обладающих свойством быстрого убывания, с использованием метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля. Последующие исследования уравнения Кортевега–де Фриза в классах конечнозонных, периодических и квазипериодических функций детально представлены в работах [2–8]. J.M.Verosky [7], посвящённой исследованию симметрий и отрицательных степеней рекурсивного оператора, было получено следующее уравнение КдФ отрицательного порядка:

$$\begin{cases} q_t = p_x \\ p_{xxx} + 4qp_x + 2q_x p = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

В исследовании S.Y.Lou [8] выявлены дополнительные симметрии, обусловленные обратимостью рекурсивного оператора системы КдФ; в частности, была получена следующая форма уравнения КдФ отрицательного порядка:

$$q_t = 2pp_x, \quad p_{xx}+qp = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{p_{xx}}{p}\right)_t + 2pp_x = 0. \tag{0.2}$$

Рассмотрим объединённое уравнение КдФ–КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником, заданным в виде суммы:

$$\begin{cases} q_t(x,t) = p_x(x,t) + q_{xxx}(x,t) - 6q(x,t)q_x(x,t) + 2\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) s(\pi,\lambda_k,t)\left(\psi_+^2(x,\lambda_k,t)\right)_x, \\ p_{xxx}(x,t) + 4q(x,t)p_x(x,t) + 2q_x(x,t)p(x,t) = 0 \end{cases}$$

$$t > 0, \quad x \in R^1, \tag{1}$$

с условиями

$$\begin{aligned} q(x,t)\big|_{t=0} &= q_0(x), \\ p(x,t)\big|_{x=0} &= p_0(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $q_0(x)$ и $p_0(t)$ заданные действительные функции причем $q_0(x)$ - π-периодическая функция. Требуется найти действительные функции $q(x,t)$ и $p(x,t)$, которые π - периодические по переменной x:

$$p(x+\pi,t) = p(x,t)\ ,\ q(x+\pi,t) \equiv q(x,t),\ t \geq 0, \quad x \in R^1 \tag{3}$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{aligned} &q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ &p(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\alpha_k(t) \in C([0,\infty))$ - заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\alpha_k(t) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, $k \to \infty$, $\psi_+(x,\lambda,t)$ - решения Флоке уравнения Штурма-Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + (-q(x,t))y = \lambda y, \quad x \in R^1, \tag{5}$$

(нормированные условием $\psi_+(0,\lambda,t) = 1$), а $s(x,\lambda,t)$ - решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

Цель данной работы – дать процедуру построения решения ($q(x,t)$, $p(x,t)$, $\psi_+(x,\lambda,t)$) задачи (1)-(4), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом.

2. Эволюция спектральных параметров. Основной результат данной работы формулируется в следующей теореме.

Теорема. Пусть $q(x,t), p(x,t),$ - решение задачи (1)-(4). Тогда спектр оператора (5) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n+1}\sigma_n(t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p(0,t) + 2q(0,t) + 4\xi_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda_k,t)\alpha_k(t)}{\xi_n - \lambda_k}\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \; n \geq 1, \tag{6}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n^0, \;\; \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0, \; n \geq 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geq 1$ - спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Следствие 1. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ и t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t: $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \geq 1$. В этом случае, система (6) примет вид

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n+1}\sigma_n(\tau,t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p(\tau,t) + 2q(\tau,t) + 4\xi_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda_k,t,\tau)\alpha_k(t)}{\xi_n - \lambda_k}\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \; n \geq 1. \tag{7}$$

Здесь

$$s(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t,\tau) - \lambda}{k^2}.$$

Учитывая формулы следов

$$q(\tau,t) = -\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)), \tag{8}$$

$$p(\tau,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\tau}\frac{\partial\xi_k(s,t)}{\partial t}ds+p_0(t), \tag{9}$$

систему (7) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Действительно, обозначим через λ_n, $n=0,1,2,\dots$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,\dots$, спектральные данные задачи

$$-y''+q(x+\tau,t)y=\lambda y,\quad x\in R^1.$$

Найдем спектральные данные λ_n, $n=0,1,2,\dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,2,\dots$ для уравнения

$$-y''+q_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in R^1.$$

Решаем задачу Коши $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,2,\dots$ для системы уравнений Дубровина (7). По формуле следов (8) определяем $q(x,t)$ и затем из формулы (9) определяем $p(x,t)$.

Заключение. В данной работе исследована смешанная задача для объединённого нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза и уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы в классе периодических функций. С использованием ме-=тода обратной спектральной задачи получены уравнения эволюции спектральных параметров и установлена инвариантность спектра соответствующего оператора Штурма–Лиувилля. Полученные результаты подтверждают эффективность методов обратной спектральной теории при исследовании нелинейных интегрируемых уравнений.

Список использованной литературы:

(1). Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Physical Review Letters. 1967, vol. 19, Issue 19, p. 1095–1097.

(2). Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. I. Функциональный анализ и его приложения. 1974, т. 8, вып. 3, с. 54–66.

(3). Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза. "Журнал экспериментальной и теоретической физики", 1974, т. 67, № 6, с. 2131–2143.

(4). Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. Математический сборник (новая серия), 1974, т. 95 (135), № 3 (11), с. 331–356.

(5). Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриса. "Теоретическая и математическая физика", 1975, т. 23, № 1, с. 51–68.

(6). Lax P.D. Periodic solutions of the KdV equations. Nonlinear wave motion. Providence: AMS, 1974, p. 85–96.

(7). Verosky J.M. Negative powers of Olver recursion operators. Journal of Mathematical Physics. 1991, vol. 32, Issue 7, p. 1733–1736.

(8). Lou S. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations // Journal of Mathematical Physics. 1994, vol. 35, Issue 5, p. 2390–2396.

Юлдашев Бегзод Эгамберган угли (преподаватель, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни: b.yuldashev@alumni.nsu.ru),

Душамов Акбар Олимбой ўғли (Преподаватель, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; dushamovakbar12@gmail.com)

ПТОЛЕМЕЕВЫ И b – МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. *В данной работе исследуются Птолемеевы полуметрические пространства. Рассматриваются свойства полуметрика и вводится понятие Птолемеева пространства, для которого доказывается неравенство Птолемея для любых четырех точек полуметрического пространства. Основной вклад работы заключается в построении и детальном анализе специальной полуметрики, которая, основываясь на понятии квазиптолемеева пространства, устанавливает глубокую взаимосвязь между b-метрическим и квазиптолемеевым пространствами. Полученные результаты позволяют по-новому взглянуть на структурные особенности данных пространств.*