в) допустим, A гомотопически плотно в X и A есть со-Z_σ-пространство. То $W(X,A)$ есть со-Z_σ-пространство.

Имеет место следующие:

1. Для любого компакта (неоднороточечного) X имеем $W(P(X),*)$ гомотопически плотно в $P(X)^\omega$, где $*\in P(X)\backslash P_\omega(X)$.

2. Для любого AR компакта X, $W(P_n(X),*)$ гомотопически плотно в $P_n(X)^\omega$, где $*\in S_{P_n}(A)$.

3. $W(P_\omega(X), A=\{\mu_i: i\in\mathbb{N}\})$ сильно Z_σ-пространство, где A счетно, но не плотно в $P_\omega(X)$.

4. $W(P(X), P_\omega(X))$ сильно Z_σ-пространство.

5. $W(P(X), A)$ со-Z_σ-пространство, где A - со-Z_σ-пространство в $P(X)$.

Заключение. Исследование показало, что топологическая структура пространства вероятностных мер $P(X)$ обладает высокой степенью однородности. Установлено, что многие естественные подпространства, возникающие в теории мер, являются либо конечномерными многообразиями, либо гомеоморфны гильбертову кубу. Полученные результаты могут быть применены в теории ковариантных функторов и топологической динамике.

Список использованной литературы:

(1). Ayupov Sh.A., Zhuvonov K.R., Zhuraev T.F. Functorial values of compact spaces under the action of some retractively η_F stable covariant on the category Comp. Uzbek Math. Jour. 2024, v. 68, Issue 4, p. 5–16.

(2). Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные структуры. М., МГУ, 1988, 252 с.

(3). Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов. УМН, 1981, т. 36, 3, с. 3–62.

(4). Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов. Канд. дис. М., МГУ, 1989, 90 с.

(5). Banakh T., Radul T., Zarichnyi M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Math. Stud. Monog. Series, v. 1, 1996, VNTL, 232 p.

(6). M. van de Vel. Convex Hilbert cubes in superextensions. Top. Appl. 22, 1986, p. 256–266.

(7). Борсук К. Теория ретрактов. М., “Мир”, 1971, 292 с.

(8). Федорчук В.В., Чигогидзе А.Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М. “Наука”, 1992, 232 с.

(9). Басманов В.Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность. ДАН СССР, 1983, т. 271, 5, с. 1033–1036.

(10). Жураев Т.Ф., Жувонов К.Р. Размерностные свойства подпространств, являющихся граничными множествами пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте Х.Вестн. Томс. Унта, Математика и механика, 2024, т. 89, с. 32–50.

(11). Долгополов М.В., Жураев Т.Ф. О евклидовых многообразиях, являющихся подпространством пространства вероятностных мер с конечными носителями на бесконечном компакте размерности нуль. Вестн. Самарского университета. Естест. серия, 2023, т. 29, 3, с. 3–-36.

(12). Федорчук В.В. Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадических функторов. ДАН СССР, т. 301, 1, с. 41–45.

(13). Чепмэн Т. Лекции о Q – многообразиях М., “Мир”. 1981, 160 с.

(14). Жураев Т.Ф. Топологические свойства гомотопически плотных подпространств компактов вида $F(X)$. Монография, Тошкент, “Методист”, 2025, 164 с.

Аллабергенова Клара Бекиммат кизи (УрГУ, преподаватель кафедры Математического анализа, PhD; klara@urdu.uz)

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ MATHEMATICA К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. *В данной статье представлен систематический обзор возможностей системы Mathematica для вычисления тройных интегралов – от базового повторного интегрирования до продвинутых символических и численных методов. Мы исследуем вычислительный механизм программного обеспечения для точного интегрирования, его численную обработку несобственных и колебательных интегралов, а также мощные инструменты визуализации для понимания областей интегрирования. Особое внимание уделяется выбору оптимальной стратегии – символьной или числовой, выбору системы координат и порядку интегрирования на конкретных примерах из многомерного математического анализа.*

Ключевые слова: *тройной интеграл, цилиндрическая система координат, сферическая система координат, несобственный интеграл, тор.*

Allabergenova Klara Bekimmat qizi (UrDU, "Matematik tahlil" kafedrasi o'qituvchisi, PhD; klara@urdu.uz)

MATEMATIKA TIZIMIDAN UCH KARRALI INTEGRALLARNI HISOBLASHDA FOYDALANISH

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Mathematica tizimining uch karrali integrallarni hisoblash imkoniyatlari tizimli tahlili keltirilgan – oddiy takrorliy integrallashdan tortib, ilg'or simbolik va sonli usullargacha. Biz dasturiy ta'minotning aniq integrallash bo'yicha hisoblash mexanizmi, uning xosmas va tebranuvchi integrallarni sonli ishlash usullari hamda integrallash sohalarini tushunish uchun kuchli vizualizatsiya vositalarini tadqiq etamiz. Alohida e'tibor optimal strategiyani tanlashga simvolik yoki sonli, koordinatalar tizimi va integrallash tartibini tanlashga ko'p o'lchovli matematik tahlildan olingan aniq misollar asosida qaratiladi.*

Kalit so'zlar: *uch karrali integral, silindrik koordinatalar sistemasi, sferik koordinatalar sistemasi, xosmas integral, tor.*

Allabergenova Klara Bekimmat kizi, (UrSU, lecturer of the Department of Mathematical Analysis, PhD; klara@urdu.uz)

APPLICATION OF THE MATHEMATICA SYSTEM TO THE CALCULATION OF TRIPLE INTEGERALS

Annotation. *This article presents a systematic review of the capabilities of the Mathematica system for computing triple integrals – from basic iterated integration to advanced symbolic and numerical methods. We explore the software's computational mechanism for exact integration, its numerical handling of improper and oscillatory integrals, as well as powerful visualization tools for understanding regions of integration. Special attention is paid to the choice of optimal strategy – symbolic or numerical, the choice of coordinate system, and the order of integration – using specific examples from multivariate calculus.*

Keywords: *Triple integral, cylindrical coordinate system, spherical coordinate system, improper integral, torus.*

Введение. Вычисление тройных интегралов ставит задачи, выходящие за рамки простой вычислительной техники: геометрия области интегрирования, выбор системы координат и порядок интегрирования существенно влияют на возможность решения. Mathematica, как символьно-численная вычислительная система, предлагает единую среду для решения этих задач. В отличие от чисто численных подходов, механизм интегрирования Mathematica часто может дать точные выражения в замкнутой форме. Вопрос заключается не просто в том, «как вычислить», а в том, «как вычислять разумно» – понимая, когда символьное интегрирование будет успешным, когда необходимы численные методы и как преобразовывать задачи в вычислительно удобную форму. Данная статья подходит к решению этих вопросов через методическое исследование алгоритмов интегрирования, реализованных в Mathematica.

Обзор литературы. В работе [1] заложены базовые принципы работы с ядром системы, описаны синтаксис и семантика основных вычислительных команд, включая символьное и численное интегрирование. Этот труд служит первичным справочным материалом для понимания того, как Mathematica реализует алгоритмы для работы с тройными интегралами. В работе Фоминчёвой и др. [2] рассматриваются прикладные аспекты использования системы в образовательном процессе. Пособие ориентировано на практическое освоение инструментов Mathematica для решения задач математического анализа, включая кратные интегралы. Статья Чигирёвой [3] посвящена дидактическим вопросам преподавания данной темы и может быть полезна для понимания типичных трудностей, возникающих у студентов при переходе от теории к компьютерным вычислениям. Теоретическую базу для постановки задач тройного интегрирования обеспечивают работы [4],[5] и [6]. В этих учебниках изложены теория тройных интегралов, свойства, методы их вычисления (повторное интегрирование, замена переменных, переход к цилиндрическим и сферическим координатам), а также типовые примеры и задачи. Они служат источником корректных математических формулировок для проверки результатов, получаемых с помощью Mathematica. Сайт *www.wolfram.com* [7] предоставляет актуальную справочную информацию, включая подробное описание функций Integrate, NIntegrate, ParametricRegion и других, а также примеры их применения.

Базовый синтаксис и семантика вычислений. Структура команды Integrate. Mathematica вычисляет тройные интегралы через вложенный или «плоский» синтаксис. Повторная (итерированная) форма явно представляет последовательное интегрирование:

```
Integrate[Integrate[Integrate[f[x,y,z], {z, z_min, z_max}],
{y, y_min, y_max}], {x, x_min, x_max}]
```

Листинг 1. Явна вложенная форма – отражает математическую запись.

Плоская форма более компактна, но семантически эквивалентна:

```
Integrate[f[x,y,z], {x, x_min, x_max}, {y, y_min, y_max},
{z, z_min, z_max}]
```

Листинг 2. Плоская форма – пределы указываются в порядке интегрирования.

Важное замечание. Первое указание переменной соответствует **самому внешнему** интегралу. Это соглашение об обратном порядке отличается от стандартной математической записи, где обычно пишут

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(x,y,z)dzdydx,$$

при этом дифференциалы перечислены от внутреннего к внешнему. В Mathematica тот же интеграл записывается как `Integrate[f[x,y,z], {x, x_min, x_max}, {y, y_min, y_max}, {z, z_min, z_max}]`| дифференциалы подразумеваются последовательностью спецификаций, а не выписываются явно.

1.1. **Переменные пределы интегрирования.** Существенным преимуществом Mathematica перед чисто численными системами является её естественная поддержка переменных пределов. Рассмотрим интеграл

$$\iiint_D dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} dzdydx$$

который вычисляет объём тетраэдра. Реализация следует непосредственно:

```
Integrate[1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1 - x}, {z, 0, 1 - y}]
```

Листинг 3: Вычисление объёма тетраэдра

Mathematica корректно обрабатывает зависимость предела по y от x и предела по z от x и y, давая точный результат $\frac{1}{3}$.

Для вычислительной эффективности, когда из одной области требуется несколько величин, можно параметризовать пределы:

```
outerB = {x, 0, 1};
middleB = {y, 0, 1 - x};
innerB = {z, 0, 1 - y};
volume = Integrate[1, outerB, middleB, innerB];
centroid = Integrate[{x, y, z}, outerB, middleB, innerB] /
volume
```

Листинг 4. Параметризация пределов.

Этот подход вычисляет как объём, так и координаты центра масс за один проход, избегая повторного вычисления пределов интегрирования.

1.2. Численное интегрирование: NIntegrate в деталях. Когда символьные методы не работают.

Для большинства тройных интегралов, возникающих в приложениях, символьное вычисление невозможно. NIntegrate в Mathematica использует сложные адаптивные алгоритмы, которые рекурсивно разбивают область интегрирования, оценивая погрешность с помощью локальной выборки.

Базовое численное тройное интегрирование следует тому же синтаксису, что и символьное:

```
NIntegrate[f[x,y,z], {x, x_min, x_max}, {y, y_min(x),
y_max(x)}, {z, z_min(x,y), z_max(x,y)}]
```

Листинг 5. Базовый синтаксис NIntegrate.

1.3. **Выбор стратегии и производительность.** NIntegrate автоматически выбирает стратегии интегрирования на основе размерности и структуры подынтегральной функции. Для тройных интегралов стратегия по умолчанию обычно использует декартово произведение одномерных адаптивных правил. Однако некоторые подынтегральные функции выигрывают от специализированных методов:

Стратегия	Когда использовать	Синтаксис
"Multidimensional Rule"	Для гладких функций по умолчанию	Автоматически
"MonteCarlo"	Многомерные или разрывные области	Method -> "MonteCarlo"
"AdaptiveMonte Carlo"	Средняя точность со сложными границами	Method -> "AdaptiveMonteCarlo"
"GlobalAdaptive"	Осциллирующие или сингулярные функции	Method -> "GlobalAdaptive", {"MaxErrorIncreases" -> 10000}

Таблица 1: Стратегии численного интегрирования в Mathematica.

1.4. **Работа со сложными областями интегрирования.** Частая ошибка при использовании NIntegrate – попытка указать пределы, которые не являются числовыми на момент вычисления. Рассмотрим:

```
NIntegrate[400,
{y, -Sqrt[(1 - x^2/6000^2 - z^2/2500^2) * (3000 ^ 2)],
Sqrt[(1 - x^2/6000^2 - z^2/2500^2) * (3000 ^ 2)]},
{x, -Sqrt[(1 - z^2/2500^2) * (6000 ^ 2)],
Sqrt[(1 - z^2/2500^2) * (6000 ^ 2)]}, {z, -2500, 2500}]
```

Листинг 6. Некорректное задание пределов (не работает).

Решение состоит в том, чтобы переупорядочить пределы интегрирования так, чтобы числовые значения распространялись корректно:

```
NIntegrate[400,                                    {z, -2500, 2500},
{x, -Sqrt[(1 - z^2/2500^2) * (6000 ^ 2)],
Sqrt[(1 - z^2/2500^2) * (6000 ^ 2)]},
{y, -Sqrt[(1 - x^2/6000^2 - z^2/2500^2) * (3000 ^ 2)],
Sqrt[(1 - x^2/6000^2 - z^2/2500^2) * (3000 ^ 2)]}]
```

Листинг 7. Корректное задание пределов с правильным порядком.

В качестве альтернативы можно определить характеристическую функцию:

```
region[x_, y_, z_,] := Boole[
y ^ 2 < (1 - x^2/6000^2 - z^2/2500^2) * (3000 ^ 2)  & &
{x ^ 2 < (1 - z^2/2500^2) * (6000 ^ 2)]
NIntegrate [400 region [x, y, z ], {x, -6000, 6000},
{y, -3000, 3000}, {z, -2500, 2500}]
```

Листинг 8. Использование характеристической функции.

Подход с характеристической функцией, хотя и более затратен вычислительно, более часто читаем и менее подвержен ошибкам для геометрически сложных областей.

2. Преобразование систем координат.

2.1. **Цилиндрические координаты.** Цилиндрические координаты (r,θ,z) оптимальны для областей с осевой симметрией. Преобразование имеет вид $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ с якобианом r. Типичная реализация:

```
coordinates = {r Cos[theta], r Sin[theta], z};
R = ParametricRegion[coordinates, {{r, 1, 3}, {theta, Pi/2,
2 Pi}, {z, 0, r}}];
```

```
Region[R, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y, z}]
Integrate[r, {r, 1, 3}, {theta, Pi/2, 2 Pi}, {z, 0, r}]
```

Листинг 9. Интегрирование в цилиндрических координатах.

Это вычисляет объём области, ограниченной $z = r$ в цилиндрических координатах.

2.2. **Сферические координаты.** Для сферически симметричных областей подходят сферические координаты (ρ, ϕ, θ) с $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho \cos\theta$ и якобианом $\rho^2 \sin\theta$;

```
coordinates = {rho Sin[phi] Cos[theta], rho Sin[phi]
Sin[theta], rho Cos[phi]};
R = ParametricRegion[coordinates, {{theta, 0, Pi/2}, {phi,
Pi/6, Pi/3}, {rho, 1, 3}}];          Region[R, Axes -> True]
Integrate [rho ^ 2 Sin[phi], {theta, 0, Pi/2}, { phi, Pi/6,
Pi/3}, {rho, 1, 3}]
```

Листинг 10. Интегрирование в сферических координатах.

Функция ParametricRegion обеспечивает визуальную проверку того, что пределы правильно описывают заданную область – это бесценный инструмент отладки.

2.3. **Общие криволинейные координаты.** Для областей, согласованных с нестандартными координатными системами, можно определить произвольные преобразования. Общий подход использует ParametricRegion с явным отображением координат и соответствующим множителем Якоби в подынтегральном выражении.

3. Практические примеры.

3.1. Объём тетраэдр.

Задача: Вычислить объём тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x + y + z = 1$.

Решение. Область можно описать как $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le z \le 1 - x - y$.

```
Integrate [1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1 - x}, {z, 0, 1 - x - y}
```

Листинг 11. Вычисление объёма тетраэдра. Результат: 1/6.

3.2. **Центр масс. Задача.** Найти центроид тетраэдра из примера 4.1.

Решение.

```
outerB = {x, 0, 1};
middleB = {y, 0, 1 - x};
innerB = {z, 0, 1 - x - y};
volume = Integrate[1, outerB, middleB, innerB];
centroid = Integrate[{x, y, z}, outerB, middleB, innerB] /
volume
```

Листинг 12. Вычисление центра масс.

В силу симметрии каждая координата равна 1/4.

3.3. **Оптимизация порядка интегрирования. Задача.** Вычислить $\int_0^3 \int_{2x}^6 e^{y^2} dydx$.

Анализ: Подынтегральная функция e^{y^2} не имеет элементарной первообразной по y. Перестановка порядка даёт $\int_0^6 \int_0^{y/2} e^{y^2} dxdy = \int_0^6 \frac{y}{2} e^{y^2} dy$, что интегрируется в $\frac{1}{4}\left(e^{36} - 1\right)$.

```
Integrate [Exp [y ^ 2], {x, 0, 3}, {y, 2x, 6}]
Integrate [Exp [y ^ 2], {y, 0, 6}, {x, 0, y/2}]
```

Листинг 13. Сравнение порядка интегрирования.

3.4. **Интегрирование по тору. Задача.** Вычислить объём тора с большим радиусом R и малым радиусом r.

Решение. В тороидальных координатах или с помощью теоремы Паппа объём равен $2\pi^2 Rr^2$ (R>r>0). С использованием ParametricRegion:

```
torusParams = {(R + r Cos[v]) Cos[u], (R + r Cos[v]) Sin[u],
r Sin[v]};
Rparam = ParametricRegion[torusParams, {{u, 0, 2 Pi}, {v, 0,
2 Pi}}];
```

Листинг 14. Вычисление объёма тора.

3.5. Визуализация области проверки.

```
coordinates = {r Cos[theta], r Sin[theta], z};
R = ParametricRegion[coordinates,
{{r, r_min, r_max}, {theta, theta_min, theta_max}, {z, z_min,
z_max}}];
RegionPlot3D[R, PlotPoints -> 50, Axes -> True]
```

Листинг 15. Визуализация области интегрирования.

Эта простая проверка выявляет ошибки в задании границ, которые иначе испортили бы результаты.

Заключение. Mathematica предоставляет всеобъемлющую среду для тройного интегрирования, охватывающую символьное вычисление, адаптивные численные методы и геометрическую визуализацию. Ключ к эффективному использованию лежит в стратегическом суждении: выбор символьного интегрирования, когда подынтегральная функция и область допускают замкнутые формы; применение численных методов в противном случае; и всегда рассмотрение преобразований координат и перестановок порядка интегрирования как инструментов решения задач. Mathematica служит не заменой аналитическому мышлению, а его усилителем – автоматизируя рутинные вычисления, оставляя стратегические решения о выборе метода, системы координат и оценке погрешностей человеческому суждению. Представленные примеры показывают, что наиболее эффективные вычисления возникают при продуманном сочетании математической интуиции и вычислительных возможностей.

Список использованной литературы:

[1]. Wolfram S. The Mathematica book, 5th ed. Wolfram Media, 2003.

[2]. Фоминчёва Л.А., Спичекова Н.В., Малышева О.Н., Вагнер О.А. Математика. Применение пакета Mathematica, в 2-х ч, часть 2, пособие, Минск, БГУИР, 2021.

[3]. Чигирёва О.Ю. Методические аспекты изложения темы «Вычисления тройного интеграла». Modern European Researches, № 1 (Т.1), с. 116–125, 2025.

[4]. Гаврилова В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Учеб. для вузов, М., изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.

[5]. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях, Том 3, Кратные, криволинейные и поверхностные интеграли. М., МЦНМО, 2018.

[6]. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч., часть II, учеб. для вузов, М., Физматлит, 2009.

[7]. www.wolfram.com.

Sharipova Shohista Bakbergan qizi (Teacher at Urgench State University named after Abu Rayhan Beruni).
Olimova Oyshajon Allabergan qizi (Student at Urgench State University named after Abu Rayhan Beruni);
e-mail: shshb1990@gmail.com)

METHODOLOGY FOR ANALYZING THE EQUILIBRIUM OF A SYSTEM OF INTERSECTING FORCES AT A POINT IN ENGINEERING CALCULATIONS

Annotation. *This paper presents a comprehensive analysis of one of the fundamental problems in statics–the equilibrium of a system of intersecting forces at a point. The study focuses on the theoretical foundations and practical implementation of the analytical method based on projecting forces onto coordinate axes. Particular emphasis is placed on the accuracy, efficiency, and applicability of this method*