$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x'}=\frac{x'}{y\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Vertikal chiziq tenglamasida $x(t)=d \Leftrightarrow x'(t)=0$ ekanligidan, $\frac{\partial L}{\partial x'}=0$.

Topilganlarni Eyler-Logranj tenglamasiga qo‘yamiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}(0)-0=0$$

Demak Eyler-Logranjning birinchi tenglamasi bajarildi. Endi Eyler-Logranjning ikkinchi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

tenglamasini bajarilishini ko‘rib chiqamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{y^2},\qquad \frac{\partial L}{\partial y'}=\frac{y'}{y\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Topilganlarni ikkinchi tenglamaga qo‘yishdan oldin

$$x(t)=d \Leftrightarrow x'(t)=0,\quad y(t)=t,\ t>0,\quad y'(t)=1$$

Larni e’tiborga olish kerak. Demak, $\frac{\partial L}{\partial y'}=\frac{1}{t}$.

U holda $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}$, $\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{y^2}=-\frac{\sqrt{0^2+1^2}}{t^2}=-\frac{1}{t^2}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{1}{t^2}-\left(-\frac{1}{t^2}\right)=0$$

Demak, vertikal yarim to‘g‘ri chiziqlar ham geodezik chiziqlar bo‘lar ekan.

Fooydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Taoufik Ahanchaou, Aziz Ikemakhen. Hyperbolic interpolatory geometric subdivision schemes. Journal: of Computational and Applied Mathematics. 2022, p. 399–410.

(2). Alaa Eddine Bensad, Aziz Ikemakhen. Hyperbolic barycentric coordinates and applications. Jur-nal: Computer Aided Geometric Design. 2022, p. 95–110.

(3). Michael M. Tung. Modelling acoustics on the Poincaré half-plane. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018, p. 366–374.

(4). Yuzuru Inahama, Shin Ichi Shirai. The essential spectrum of Schrödinger operators with asymptotically constant magnetic fields on the Poincaré upper-half plane. Journal of Mathematical Physics. 2003, 44(1), p. 89–106.

Turdimurodov Otabek Farxod o‘g‘li (Kattaqo‘rg‘on davlat Pedagogika instituti “Aniq va tabiiy fanlar” kafedrasi assistent o‘qituvchisi; otabekturdimurodov01091992@gmail.com)

YASSI KANALDA REOLOGIK MURAKKAB SUYUQLIKNING NOSTATSIONAR OQIM MASALASINI SONLI USULDA YECHISH

Annotatsiya. *Bu maqolada rologik murakkab suyuqlikning yassi kanaldagi o‘zgarmas bosim gradiyenti ta’siridagi nostasionar oqimi masalasi Maksvell modelidan foydalangan holda, sonli usul yordamida yechilgan. Masalani sonli usulda yechishda chekli ayirmalar metodi qo‘llanilgan. Tahlil natijalari asosida, elastik qovushoq suyuqlikning elastiklik xususiyatini aniqlovchi Debor sonining katta qiymatlari ta’siri ostidagi o‘tish jarayonlari Nyuton suyuqligi o‘tish jarayonlaridan tubdan farq qilishi ko‘rsatilgan. Grafiklarni solishtirish orqali analitik va sonli usul natijalarining bir-biridan deyarli farq qilmasligi va kompyuter hisob natijasida aniqlangan farqlar mingdan birdan katta bo‘lmasligi aniqlangan.*

Kalit so'zlar: *nostasionar oqim, Laplas almashtirishlari, bosim gradiyenti, Debor soni, tezlik taqsimlanishi, elastik qovushoq suyuqlik.*

Турдимуродов Отобек Фарход угли (Ассистент кафедры «Точные и естественные науки» Каттакурганского государственного педагогического института; otabekturdimurodov01091992@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Аннотация. *В данной статье численно исследуется задача нестационарного течения реологически сложной жидкости в плоском канале под действием постоянного градиента давления с использованием модели Максвелла. Для численного решения поставленной задачи применяется метод конечных разностей. На основе проведённого анализа показано, что переходные процессы в упруговязкой жидкости при больших значениях числа Деборы, характеризующего упругие свойства жидкости, принципиально отличаются от переходных процессов в ньютоновской жидкости. Сравнение графических результатов показало, что результаты, полученные аналитическим и численным методами, практически совпадают. Установлено, что расхождение между аналитическими и численными результатами, выявленное в ходе компьютерных расчётов, не превышает одной тысячной.*

Ключевые слова: *нестационарное течение, преобразование Лапласа, градиент давления, число Деборы, распределение скорости, вязкоупругая жидкость*

Turdimurodov Otabek Farhod o'g'li (Assistant teacher of the department of "Exact and Natural Sciences" of the Kattakurgan State Pedagogical Institute; otabekturdimurodov01091992@gmail.com)

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF UNSTEADY FLOW OF A RHEOLOGICALLY COMPLEX FLUID IN A PLANAR CHANNEL

Annotation. *This paper presents a numerical investigation of the problem of unsteady flow of a rheologically complex fluid in a planar channel under the action of a constant pressure gradient using the Maxwell model. The finite-difference method is employed for the numerical solution of the problem. Based on the analysis, it is shown that the transient processes in an elastic-viscous fluid at large values of the Deborah number, which characterizes the elastic properties of the fluid, differ fundamentally from those observed in a Newtonian fluid. A comparison of the graphical results demonstrates that the analytical and numerical solutions are in close agreement. The computer calculations indicate that the discrepancy between the analytical and numerical results does not exceed one-thousandth.*

Keywords. *unsteady flow, Laplace transforms, pressure gradient, Deborah number, velocity distribution, viscoelastic fluid.*

Kirish. Elastik qovushoq suyuqliklar harakatini ifodalovchi tenglamalar sistemasi matematik jihatdan murakkabligi sababli, bunday shaklda qo'yilgan masalalarini yechish sonli usullarning keng qo'llanilishiga olib keladi. Masalan, [1,2] ishlarda kanallarda nostasionar izotermik va noizotermik oqimlarda elastik qovushoq suyuqlikning chiziqsiz elastiklik xususiyalarini inobatga olgan holdagi masalalar sonli usulda yechilgan va tegishli xulosalar keltirilgan.

Elastik qovushoq suyuqliklarning kanallardagi, nostasionar, tebranma oqimlarda, noturg'inlik rivojlanishi natijasida oqimlarda jiddiy o'zgarishlar sodir bo'lishi mumkin. Halqasimon doiraviy kesimli yetarlicha uzun quvurlarda elastik qovushoq suyuqlikning nostasionar oqimi Z.P.Shulman, B.M.Xusid [1-4] tomonidan tadqiq etilgan. Ko'p hollarda, elastik qovushoq suyuqliklarning nostasionar oqimlari tatqiqotlari Maksvell va Oldroydning chiziqli modeliga asoslangan [5]. Bunga o'xshash masalalarni yechishda Laplas almashtirishlaridan keng qo'llanilgan [6].

[7–9] ishlarda bosim gradiyentining pog'onali o'zgarishi bilan hosil qilingan nostasionar oqimda nyuton suyuqligi uchun maksimal tezlikning vaqt bo'yicha rivoji monoton, elastik qovushoq suyuqlik uchun tebranuvchi xarakterga egaligi ko'rsatilgan. Kritik nuqta atrofida elastik qovushoq suyuqlikning nostasionar oqimi [10] ilmiy tadqiqot ishida qaralgan. Bir necha relaksatsiya koeffitsiyentiga ega bo'lgan elastik qovushoq suyuqlikning yassi paralel plastinkalar orasidagi suyuqlikning Kuett oqimi [11] ishda keltirilgan bo'lib, bunda elastik qovushoq suyuqlik uchun qo'lanilgan Maksvell modelining yuqori va pastki konvektiv hosilalari e'tiborga olingan [12] ishda nostasionar oqim masalasi uyurmali oqim uchun umumlashtirilgan. Bosim gradiyentining vaqt bo'yicha davriy o'zgarishi natijasidagi elastik qovushoq suyuqlikning nostasionar oqimlar masalalariga [13–18] ishlar bag'ishlangan. Maksvell modeli asosida [19] ishda elastik qovushoq suyuqlikning silindrik quvurdagi nostasionar tebranma oqimi qaralgan. Masala analitik usulda yechilgan. Kattaliklarning dinamik va chastotali o'zgarishlari uchun hisob formulalari keltirib chiqarilgan. Aniqlangan formulalar yordamida devor urunma kuchlanishining tebranish chastotasi parametriga,

suyuqlikning relaksatsiya xususiyatiga bog‘liq o‘zgarishi tahlil qilingan. Tahlil natijalari asosida suyuqligining nostatsionar oqimdagi devor urunma kuchlanishi o‘rniga nyuton suyuqligi oqimidagi devor urunma kuchlanishini olish ba’zi bir cheklovlarga olib kelishligi ko‘rsatilgan. Maksvell va Oldroyd modellari asosida elastik qovushoq suyuqlikning tebranma oqimi [19] ishda tadqiq qilingan bo‘lib, bunda nyuton suyuqligi tebranma oqimida mavjud bo‘lmagan bir necha noan’aviy gidrodinamik hodisalarning ro‘y berishi aniqlangan. Bosim gradiyentining vaqtga bog‘liq ravishda har xil o‘zgarishlari ta’siridagi silindrik quvurdagi elastik qovushoq suyuqlikning nostatsionar oqimi [20] tadqiqot ishida qaralgan. Qo‘yilgan masala analitik usulda yechilgan. Barcha hollar uchun tezlik taqsimlanishi, suyuqlik sarfi va boshqa gidrodinamik kattaliklar uchun hisob formulalari aniqlangan va tegishli xulosalar keltirilgan. G.B.Sizixning [21] tadqiqot ishida qovushoq suyuqlikning vintsimon oqimi qaralgan. Vintsimon oqimda ro‘y beradigan gidrodinamik o‘zgarishlar haqida mulohazalar yuritilgan. Elastik qovushoq suyuqligining nostatsionar oqimi [22] tatqiqot ishida qaralgan bo‘lib, unda o‘tish jarayonining suyuqlik elastiklik xususiyatiga bog‘likligi tadqiq qilingan.

Yuqorida keltirilgan ishlarda, asosan, qovushoq va elastik qovushoq suyuqliklarning yassi kanal va silindrik quvurlardagi bosim gradiyenti ta’siridagi tebranma oqimlari qaralgan. Ammo elastik qovushoq suyuqlikning yassi kanal va silindrik quvurlardagi nostasionar oqimi masalalarining analitik va sonli usuldagi yechimlariga bag‘ishlangan ishlar yetarli darajada emas. Shu boisdan ushbu tadqiqot ishida elastik qovushoq suyuqlikning yassi kanaldagi nostasionar oqimi masalasi analitik va sonli usullarda yechiladi. Aniqlangan yechimlar yordamida elastik qovushoq suyuqlik maksimal tezligining vaqt bo‘yicha o‘zgarishlari Debor sonining har xil qiymatlarida tahlil qilinadi.

1. Masalaning qo‘yilishi. Reologik murakkab suyuqlik modellari asosida suyuqlik harakati laminar bo‘lgandagi yassi kanallardagi nostatsionar oqim masalasi qaraladi. Yassi kanal devorlari orasidagi masofa $2h$ deb belgilanadi, kanal yetarlicha uzun deb faraz qilinib, reologik murakkab suyuqlik oqimi uchun xarakterli nisbiy uzunlik tanlanadi. Bunda kanal eni uzunligining bo‘ylama o‘q bo‘yicha uzunligiga nisbati cheksiz kichik miqdor deb hisoblanadi, shuning uchun oqimlarda ko‘ndalang tezliklar paydo bo‘lmaydi, x o‘qi quvur bo‘ylama o‘qi bo‘yicha gorizontal yo‘nalishda, y o‘qi esa x o‘qiga perpendikulyar holda verti-kal yo‘nalishda olinadi. Yuqorida keltirilgan shartlar asosida suyuqlikning yassi kanaldagi nostasionar ha-rakat tenglamasi kuchlanishlar ko‘rinishida quyidagicha ifodalanadi [23–30]:

$$\rho\frac{\partial(y,t)}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau(y,t)}{\partial y}, \tag{1}$$

Elastik qovushoq suyuqlikning ryeologik tenlamasi Maksvell modeliga asoslangan tenglama yordamida aniqlanadi [3, 4]:

$$\lambda\frac{\partial\tau(y,t)}{\partial t}+\tau=\mu\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} \tag{2}$$

Qo‘yilgan masala yechimini qulayroq ko‘rinishda aniqlash uchun, odatda, tenglamalarda qatnashgan kattaliklar ma’lum bir almashtirishlar yordamida o‘lchamsiz shaklga keltiriladi. Bunday almashtirishlarni quyidagicha kiritamiz:

$$u=U\overline{u},\ p=\overline{p}\frac{\mu UL}{h^2},\ \tau=\overline{\tau}\frac{\mu U}{h},\ t=\overline{t}T,\ \ y=h\overline{y},\ \ x=L\overline{x}$$

Bu almashtirishlar yordamida (1) va (2) tenglamalar ushbu ko‘rinishga keladi. (Tyenglamadagi kattaliklar ustidagi chiziqchalar soddalik uchun tushirib qoldirildi):

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}=2+\frac{\partial\tau(y,t)}{\partial y},\qquad De\frac{\partial\tau(y,t)}{\partial t}+\tau(y,t)=\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} \tag{3}$$

Bu yerda $-\dfrac{\partial p(x)}{\partial x}=2,\ De=\dfrac{\lambda\nu}{h^2}$

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni o‘lchamsiz shaklda quyidagicha shakllantiramiz. Vaqtning boshlang‘ich holatida suyuqlik yassi kanalda harakatsiz holatda joylashgan deb qabul qilamiz. Ya’ni:

$$t=0\qquad u(y,0)=0,\quad \tau(y,0)=0$$

$$t>0,\quad y=1 \qquad u(1,t)=0$$
$$t>0,\quad y=-1 \qquad u(-1,t)=0 \tag{4}$$

Shakillantirilgan (1) va (2) tenglamlarni berilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartlar asosida yechish uchun sonli usulni qo‘llab yechimlarni keltiramz. Masalani sonli usulda yechish uchun chekli ayirmalar metodidan foydalanamiz.

2. Masalani sonli usulda yechish. Quyilgan masalaning sonli usulda yechimini aniqlash uchun, dastlab, tenglamalar sistemasini o‘lchamsiz shaklga keltirish kerak. Bu amallar oldingi paragrafda bajarilanligi tufayli (3) ko‘rinishdagi tenglamalar smstemasidan foydalanamiz:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}=2+\frac{\partial \tau(y,t)}{\partial y},\qquad De\frac{\partial \tau(y,t)}{\partial t}+\tau(y,t)=\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} \tag{12}$$

Sonli xisoblashlar uchun (12)-ko‘rinishdagi o‘lchamsiz shaklga keltirilgan tenglamalar sistemasidan foydalaniladi:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(y,t)}{\partial t}=2+\dfrac{\partial \tau(y,t)}{\partial y}\\ De\dfrac{\partial \tau(y,t)}{\partial y}+\tau(y,t)=\dfrac{\partial u(y,t)}{\partial y}\end{cases} \tag{13}$$

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar quyidagicha qabul qilinadi:

$$t=0 \qquad u(y,0)=0,\quad \tau(y,0)=0, \tag{14}$$

$$t>0,\quad y=1 \qquad u(1,t)=0;\quad y=-1 \quad u(-1,t)=0\,, \tag{15}$$

Tenglamalar sistemasini sonli usulda yechish uchun, dastlab, fazoviy diskretlash usulidan foydalanamiz. Bunda fazoviy o‘zgaruvchi $y\in[-1,1]$ oraliqda bir xil qadamli to‘r yordamida diskredlashtiriladi:

$$y_i=-1+i\Delta y,\quad i=0,1,2,.....,N \tag{16}$$

bu yerda

$$\Delta y=\frac{2}{N}$$

Ichki tugunlarda fazoviy hosilalar ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lgan markaziy chekli ayirmalar yordamida yaqinlashtiriladi:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_i}\approx\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta y},\qquad \left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=y_i}\approx\frac{\tau_{i+1}-\tau_{i-1}}{2\Delta y}, \tag{17}$$

Chegaraviy tugunlarda tezlik uchun berilgan (15) ko‘rinishidagi shartlar to‘g‘ridan to‘g‘ri qo‘llaniladi. Olingan oddiy differensial tenglamalar sistemasi fazoviy diskredlash natijasida (13) tenglamalar sistemasi vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi:

$$\frac{du_i}{dt}=2+\frac{\tau_{i+1}-\tau_{i-1}}{2\Delta y} \tag{18}$$

$$\frac{d\tau_i}{dt}=\frac{1}{De}\left(\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta y}-\tau_i\right),i=1,2,....,N-1 \tag{19}$$

Ma’lumki, masala shartiga ko‘ra, vaqtning boshlang‘ich momentida suyuqlik yassi kanalda tinch holatda bo‘ladi. Bundan barcha fazoviy tugunlarda quyidagicha shart o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Diskret boshlang‘ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$u_i(0)=0\,,\tau_i(0)=0\,,i=1,2,....,N-1 \tag{20}$$

Bu qiymatlar vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha integratsiya jarayonining boshlang‘ich nuqtasi sifatida qabul qilinadi. Shuning uchun ham Runge-Kutta usulidan foydalanilganda, boshlang‘ich vektor

$$Y^0=(u_i(0)=0,.....,u_N(0)=0,\tau_i(0)=0,.....,\tau_N(0)=0) \tag{21}$$

(21) nol vektordan iborat bo‘ladi. Boshlang‘ich shartlarning bunday tanlanishi analitik yechimda qabul qilingan boshlang‘ich shartlarga to‘liq mos keladi.

Fazoviy o‘zgaruvchi bo‘yicha chekli ayirmalar usuli qo‘llanilgandan so‘ng, qo‘yilgan masalani vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha diskretlash lozim bo‘ladi. Buning uchun (13) ko‘rinishidagi tenglamalar sistemasi, vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu sistemani quyidagi umumiy vektor ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$\frac{dY(t)}{dt} = F\left(Y(t)\right) \tag{22}$$

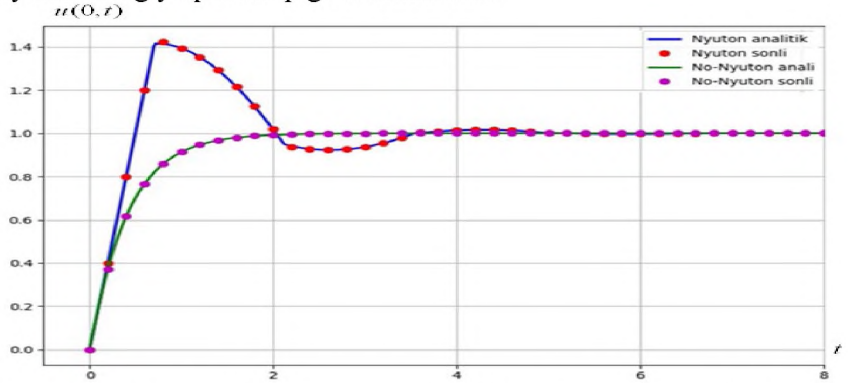
(22)dagi $Y(t)$ vektori barcha fazoviy tugunlardagi tezlik va kuchlanish funksiyalarining qiymatlarini o‘z ichiga oladi. Ushbu sonli yondashuvda, avval, fazo bo‘yicha diskretlashtirish amalga oshiriladi, vaqt esa ushbu bosqichda uzluksiz deb qaraladi. Shu sababli i indeksi fazoviy to‘r nuqtalarini ifodalaydi, holbuki, vaqt indeksi kiritilmaydi. Natijada hosil bo‘lgan tenglamalar tizimi vaqt bo‘yicha oddiy differensial tenglamalar tizimi ko‘rinishiga ega bo‘ladi. Keltirib chiqarilgan oddiy differensial tenglamalar sistemasini vaqt bo‘yicha yechish uchun yuqori aniqlikka ega bo‘lgan Runge-Kutta to‘rtinchi tartibli usulidan foydalanamiz. Ushbu usul vaqt bo‘yicha to‘rtinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lib, uzluksiz yechimlar uchun yuqori aniqlikni ta’minlaydi. Vaqt o‘qi Δt qadam bilan diskredlashtiriladi va $t^n = n\Delta t$ nuqtalarda yechim qiymatlari aniqlanadi. Bu yechimlarni $Y^n \approx Y(t^n)$ deb belgilaymiz. U xolda Runge-Kutta to‘rtinchi tartibli sxemasi quyidagi oraliq qadamlar yordamida amalga oshiriladi:

$$\begin{aligned} k_1 &= F(Y^n) \\ k_2 &= F\left(Y^n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \\ k_3 &= F\left(Y^n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) \\ k_4 &= F\left(Y^n + \Delta t k_3\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Kyeltirilgan (23) formulalardagi k_1, k_2, k_3, k_4 qiymatlar vaqt qadami ichida yechimning turli nuqtalardagi yo‘nalishini tavsiflovchi oraliq hosilalar hisoblanadi. Keltirilgan (23) formulalardagi oraliq qadamlardan foydalanib, keyingi vaqt qadamidagi yechim qiymatini quyidagicha aniqlaymiz:

$$Y^{n+1} = Y^n + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{24}$$

Keltirilgan (24) sxema vaqt bo‘yicha to‘rtinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lib, uning lokal xatoligi $O(\Delta t^5)$, umumiy global xatolik esa $O(\Delta t^4)$ tartibda bo‘ladi. Shu sababli vaqt qadamini yetarlicha kichik tanlash orqali sonli yechimning yuqori aniqligi ta’minlanadi.



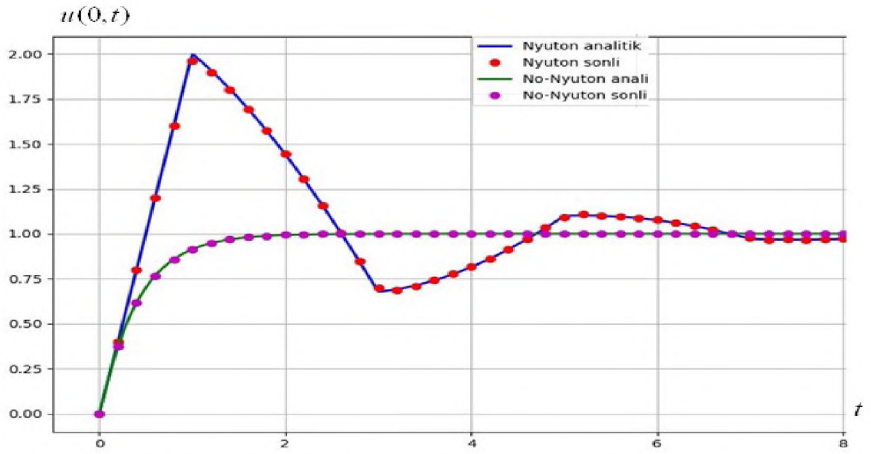
1-rasm. Yassi kanal bo‘ylama o‘qidagi o‘lchamsiz maksimal tezlikning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi (Debor soni $De = 0.5$ bo‘lganda).

Sonli hisoblashlar Phation dasturlash tili yordamida amalga oshirildi. Hisoblash algoritmi fazoviy diskredlash uchun chekli ayirmalar usulini va vaqt bo‘yicha integratsiya qilish uchun Runge-Kutta to‘rtin-

chi tartibli usulini qo‘llashga asoslanadi. Olingan sonli va analitik yechimlar natijalar tadqiqot ishining keyingi sonli hisob natijalari va ularni solishtirish qismda taqqoslanadi.

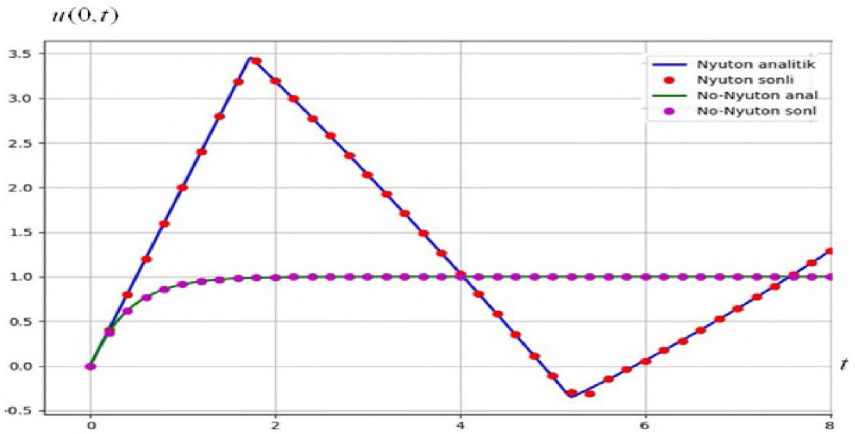
2. Hisob natijalari va ularni solishtirish. Sonli usuldagi yechim asosida yassi kanal bo‘ylama o‘qidagi maksimal tezlikning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi ifodalangan. Bu kattalikning Debor sonining har xil qiymatlaridagi vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarishlari 1–3-rasmlarda tasvirlangan.

1-rasmda tasvirlangan grafiklarni tahlil qilish natijasida Debor sonining $De = 0.5$ qiymatida elastik qovushoq suyuqlikning nostasionar oqimidagi maksimal tezlikning vaqtga bog‘liq ravishdagi o‘zgarishi nyuton suyuqligi nostasionar oqimidagi maksimal tezlik o‘zgarishdan sezilarli darajada farq qilishi kuzatildi. Bu farq, asosan, vaqtning $0 < t < 4$ oraligidagi qiymatlarida sodir bo‘ladi. Bunda elastik qovushoq suyuqlikning nostasionar oqimidagi maksimal tezlikning boshlang‘ich holatdagi o‘zgarishlari nyuton suyuqligi maksimal tezligidan 1.4 marta katta bo‘lishi aniqlandi.



2-rasm. Yassi kanal bo‘ylama o‘qidagi o‘lchamsiz maksimal tezlikning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi (Debor soni $De = 1$ bo‘lganda).

Ryeologik murakkab Maksvell suyuqligining Debor soni $De = 1;\ 3$ bo‘lgandagi nostasionar holatdan stasionar holatga o‘tish jarayonlari, ya’ni, yassi kanal o‘qi bo‘yicha yo‘naltirilgan bo‘ylama tezlik maksimal qiymatining shu o‘qdagi statsionar holatdagi maksimal tezlik qiymatiga nisbatining vaqtga bog‘likligi 2,3-rasmlarda aks ettirilgan. Rasmlardagi grafiklardan ko‘rinadiki, Maksvell modeli asosidagi reologik murakkab suyuqlikning nostatsionar holatdan statsionar holatga o‘tish jarayoni Nyuton suyuqligidan farqli ravishda, vaqtning boshlang‘ich qiymatlarida keskin oshishi va keyinchalik to‘lqinsimon o‘zgarishlar orqali statsionar holatga o‘tishi aniqlandi. Bundan tashqari, Maksvell modeliga bo‘ysunuvchi suyuqliklarning stasionarlikka o‘tish vaqti Nyuton suyuqligi modeliga bo‘ysunuvchi suyuqlikning o‘tish vaqtidan bir necha barobar katta bo‘lishini 2,3-rasmlarda ko‘rish mumkin. Masalan, 2-rasmda 2 marta; 3-rasmda 3.5 marta oshganligini kuzatish mumkin.



3-rasm. Yassi kanal bo‘ylama o‘qidagi o‘lchamsiz maksimal tezlikning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi (Debor soni $De = 3$ bo‘lganda).

Maksvell modeliga bo‘ysunuvchi bunday suyuqliklarning o‘tish jarayonidagi sakrab ortishi, Maksvell modelda hisobga olingan inersiya kuchining ta’siri orqali ro‘y beradi. Bu kuchining ta’siri qo‘yilgan masalada Dyebor sonining o‘zgarishlari orqali ifodalanadi. Debor soning ortishi natijasida, ya’ni: $De = 1;\ 3$ bo‘lganda, o‘tish jarayonidagi maksimal tezlikning 2.5–3.5 marta nyuton suyuqligi maksimal tezligidan katta bo‘lishi 2 va 3-rasmlarda keltirilgan. Rasmlarda keltirilgan grafiklar analitik va sonli usullar yordamida aniqlangan hisob formulalari asosida chizilgan. Rasmlarda keltirigan grafiklarning uzliksiz chiziqlari analitik yechim natijalari, nuqtalar bilan tasvirlanganlari esa sonli usul natijalariga to‘g‘ri keladi. Grafiklarni solishtirish orqali analitik va sonli usul natijalarining bir-biridan deyarli farq qilmasligini va kompyuter hisob natijasidagi farqlar mingdan birga tengligini aniqlash mumkin.

Xulosa. Reologik murakkab suyuqlikning yassi kanaldagi o‘zgarmas bosim gradiyenti ta’siridagi nostasionar oqimi masalasi Maksvell modelidan foydalangan holda, sonli usul yordamida yechildi. Masalani sonli usulda yechishda chekli ayirmalar metodi qo‘llanildi. Masalani sonli usulda yechish asosida yassi kanalda elastik qovushoq suyuqlikning nostasionar oqimida tezlik taqsimlanishi tadqiq qilingan. Tadqiq natijalari shuni ko‘rsatdiki, elastik qovushoq suyuqlikning elastiklik xususiyatini aniqlovchi Debor sonining katta qiymatlari ta’siri ostidagi o‘tish jarayonlari Nyuton suyuqligi o‘tish jarayonlaridan tubdan farq qilishligi aniqlandi. Bunda Debor soni $De = 0.5$ bo‘lganda elastik qovushoq suyuqlikning nostasionar oqimidagi maksimal tezlikning boshlang‘ich holatdagi o‘zgarishlari nyuton suyuqligi maksimal tezligidan 1.4 marta katta bo‘lishi va Debor soning ortishi natijasida, ya’ni, $De = 1$ va $De = 3$ bo‘lganda o‘tish jarayonidagi maksimal tezlikning 2.5 va 3.5 marta nyuton suyuqligi maksimal tezligidan katta bo‘lishi aniqlandi. Grafiklarni solishtirish orqali analitik va sonli usul natijalarining bir-biridan deyarli farq qilmasligi va kompyuter hisob natijasida aniqlangan farqlar mingdan birdan katta bo‘lmasligi kuzatildi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Шульман З.П., Хусид Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. Минск, 1983, 256 с.

(2). Шульман З.П., Хусид Б.М. Фенологические и микроструктурные теории наследственных жидкостей, Инст-т тепло и массообмен АН Белоруссии. Препр., 1983, № 4, 50 с.

(3). Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., “Мир”, 1975,592 с.

(4). Улкинсон У.Л. Неньютоновоские жидкости гидромеханика, премешивание и теплообмен. Изд. «МИР», Москва, 1964, 216 с.

(5). Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент, “Фан”, 1982, 104 с.

(6). Наврузов К., Хакбердиев Ж.Б. Динамика неньютоновских жидкостей. Ташкент, “Фан”, 2000, 246 с.

(7). Navruzov K., Rajabov S., Abdikarimov N., Turdimuradov O., Nasrulloeva R. Non-stationary flow of viscoelastic fluid in a cylindrical pipe. E3S Web of Conferences 587, 01013 (2024), p .1–11.

(8). Navruzov K., Begjanov A.S., Abdikarimov N.I., Yusupov S. Examining laminar non-stationary viscoelastic fluid flow between two parallel planes. BIO Web of Conferences 105, 05005 (2024).

(9). Shukurov Z. Navruzov K., Turaev M., Abdikarimov N. Laminar unsteady flow of a viscoelastic liquid in a flat channel. E3S Web of Conferences 587, 01014 (2024), p. 1–10

(10). Мошкин Н.П. Нестационарные течения вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки с противотоком в начальный момент. Сибирский журнал индустриальной математики. 2022, т. 25, № 1, с. 92–104.

(11). Липедевский В.Ю., Неверов В.В., Кармушин С.Р. Сдвиговые течения вязкоупругой среды с несколькими временами релаксации. Многофазные системы 2023. Т. 18, № 4, с. 266–268.

(12). Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости. Изв. РАН. МЖГ, 2016, № 2, с. 25–31.

(13). Navruzov K., Abdikarimov N.I., Jumayev J. Transient Processes during Nonstationary Flow of an Elastic-Viscous Liquid in a Flat Channel. Russian Mathematics, 2025, 69(3), p. 24–36.

(14). Navruzov K., Fayziyev R., Mirzayev A., Sharipova Sh. Tangential Shear Stress in an Oscillatory Flow of a Viscoelastic Fluid in a Flat Channel. Lecture Notes in Computer Science Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics. 2023, 13772 LNCS, p. 1–14.

(15). Navruzov K., Turaev M., Shukurov Z. Pulsating flows of viscous fluid in channel for given harmonic fluctuation of flow rate // E3S Web of conferences 401. 02010/ 2023 (CONMECHYDREO-2023), p. 1–8.

(16). Navruzov K., Rajabov S., Ashurov M. Mathematical modeling of hydrodynamic resistance an oscillatory flow of a viscoelastic fluid // E3S Web of conferences 401. 02026/ 2023 (CONMECHYDREO-2023). p. 1–10; 17.

(17). Navruzov K., Turaev M., Shukurov Z. Pulse flow of elastic-viscous incompressible fluid in a plane channel// Aip Conference. 3119(1), 030002, 2024.

(18). Navruzov K., Sharipova Sh., Oscillatory flow of rheological complex fluid in a flat channel// E3s Web of Conferences 508, 06008 (2024).
(19). Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S. and Khuzhayorov B.Kh. Tangential Shear Stress under the Periodic Flow of a Viscoelastic Fluid in a Cylindrical Tube// SSN 0015-4628, Fluid Dynamics, 2021, vol. 56, №. 2, p. 189–199.
(20). Casanellas L., Ortin J. Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids. J.Non-Newtonian Fluid. Mechanics. 166. (2011). p. 1315–1326.
(21). Rahaman K.D., Ramkissoon H. Unsteady axial viscoelastic pipe flows. J.Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1993, p. 57; 27.
(22). Сизых Г.Б. Осесимметричные винтовые течения вязкой жидкости. Изв. ВУЗ, Математика, 2019, вып. 2, с. 49–56.
(23). Navruzov K., Rajabov S., Abdikarimov N., Turdimurodov O., Nasrulloeva R, Study of non-stationary flow of viscoelastic incompressible fluid in a flat channel // E3S Web of Conferences 587, 01012 (2024), p. 1–13.
(24). Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах// Казань.издание университетской типографии, 1882, с. 41–72.
(25). Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1956, 520 с.
(26). Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1954, 420 с.
(27). Чарный И.А. Неустановившееся течение в реальной жидкости в трубах. М., “Недра”, 1975, с. 296.
(28). Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидромеханика. М., “Наука”,1986, с. 736.
(29). Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. М., Машиностроение, 1982, 424 с.
(30). Лойцянский Л.Г. МЖГ, Дорфа, М., 2003, 786 с.

Turaev Yunusbek Shavkatovich (“Cyber University” State University, Department of Mathematics and Natural Sciences, Associate Professor; yunus.turaev.nw@gmail.com),
Mamedov Qudrat Allamovich (Urgench State University named after Abu Rayhan Beruni, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Associate Professor; mqudrat1969@gmail.com),
Jumaniyazov Nizomjon Baxtiyorovich (Urgench State University named after Abu Rayhan Beruni, Department of Computer Science and Artificial Intelligence Technologies, Associate Professor: nizomjon_jumaniyazov@yahoo.com)

RADIATION PRESSURE FROM MAXWELL’S EQUATIONS: A STEP-BY-STEP DERIVATION

Annotation. *We derive, directly from Maxwell's equations, that electromagnetic waves carry momentum and exert mechanical pressure on matter. Starting from Poynting's theorem (energy conservation) we introduce the electromagnetic momentum density and the Maxwell stress tensor via the momentum-balance law. Evaluating the stress on a surface for a plane wave yields the standard results: for normal incidence, a perfectly absorbing surface experiences a pressure ($p = I/c$), while a perfectly reflecting surface experiences ($p = 2I/c$), where I is the intensity and c is the speed of light.*

Keywords: *radiation pressure, intensity, Maxwell's equation, stress tensor.*

MAKSVELL TENGLAMALARI ASOSIDA NURLANISH BOSIMI: BOSQICHMA-BOSQICH KELTIRIB CHIQARISH

Annotatsiya. *Biz Maksvell tenglamalaridan bevosita elektromagnit to‘lqinlar impuls tashishi va moddaga mexanik bosim ko‘rsatishi xulosasini keltirib chiqaramiz. Poynting teoremasidan (energiya saqlanish qonuni) boshlab, impuls balansi qonuni yordamida elektromagnit impuls zichligi va Maksvell kuchlanish tenzori tushunchalarini kiritamiz. Yassi to‘lqin uchun sirtga ta’sir etuvchi kuchlanishni tahlil qilish standart natijalarni beradi: to‘lqin tik tushganda, mukammal yutuvchi sirtga p = I/c bosim, mukammal qaytaruvchi sirtga esa p = 2I/c bosim ta’sir qiladi (bu yerda I - intensivlik, c - yorug‘lik tezligi).*

Kalit so‘zlar: *nurlanish bosimi, intensivlik, Maksvell tenglamasi, kuchlanish tenzori.*

ДАВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА: ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД

Аннотация. *Исходя непосредственно из уравнений Максвелла, мы показываем, что электромагнитные волны переносят импульс и оказывают механическое давление на вещество. Опираясь на теорему Пойнтинга (закон сохранения энергии), мы вводим понятие плотности электромагнитного импульса и тензор напряжений Максвелла на основе закона баланса импульса. Расчет давления, оказываемого плоской волной на поверхность, приводит к стандартным результатам: при нормальном падении волны на идеально поглощающую поверхность давление составляет p = I/c, а на идеально отражающую – p = 2I/c (где I – интенсивность, а c - скорость света).*