ти положений равновесия и стационарных движений при дискретной реализации управления. Показано, что использование потенциальных функций и интегральных корректирующих слагаемых позволяет обеспечить стабилизацию системы без измерения скоростей обобщенных координат.

Список использованной литературы (References):

[1]. Halanay A., Rasvan V. Stability and stable oscillations in discrete time systems. CRC Press, 2000, 296 p.

[2]. Andreev A.S., Peregudova O.A. Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017, vol. 81, Issue 2, p. 95–105.

[3]. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems. Systems Science and Control Engineering, 2018, vol. 6, p. 12–19.

[4]. Ахматов А.А. Стабилизация установившихся движений механических систем с циклическими координатами дискретным управлением без измерения скоростей. "Ilm sarchashmalari" ilmiy-nazariy, metodik jurnali, 2025, № 10.1, p. 39–43.

[5]. Akhmatov A.A. Stabilization of the rotational motion of a manipulator"s end-effector Scientific reports of Bukhara state university 2025, 8(1), p. 66–71.

Нуриддинов Бахтиёр Зафарович (Ташкентский Химико-технологический институт, заведующий кафедрой высшей математики, доктор философии по физико-математическим наукам (PhD), доцент; nuriddinovbaxtiyor1985@gmail.com),

Умиров Шохрух Боротович (Ташкентский Химико-технологический институт, базовый докторант кафедры высшей математики; shohruxumirov22@gmail.com)

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХСЛОЙНЫХ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Аннотация. *В данной работе исследуется распространение осесимметричных собственных волн в трехслойной цилиндрической неоднородности вдоль радиального направления. Предполагается, что каждый слой является линейно упругим и характеризуется различными механическими свойствами. Уравнения движения выводятся в рамках трехмерной теории упругости в цилиндрических координатах. С помощью решений в виде гармонических волн задача сводится к краевой задаче на собственные значения. Для каждого слоя построены точные аналитические решения, а дисперсионные соотношения получены путем применения идеальных условий контакта на границах слоев и соответствующих граничных условий на внешней поверхности. Проанализировано влияние неоднородности материала и толщины слоя на дисперсионные характеристики. Результаты имеют практическое значение для проектирования и неразрушающего контроля многослойных цилиндрических конструкций, используемых в инженерных приложениях.*

Ключевые слова: *осесимметричные волны, собственные волны, многослойный цилиндр, структурная неоднородность, дисперсионные соотношения.*

UCH QATLAMLI STRUKTURAVIY NOBIR JINSLI SILINDRIK JISMLARDAGI O‘QQA NISBATAN SIMMETRIK XUSUSIY TO‘LQINLAR

Annotatsiya. *Ushbu ishda radial yo‘nalish bo‘ylab uch qatlamli silindrik nobir jinslilikda o‘qqa nisbatan simmetrik xususiy to‘lqinlarning tarqalishi tadqiq qilinadi. Har bir qatlam chiziqli elastik deb faraz qilinadi va turlicha mexanik xossalar bilan xarakterlanadi. Harakat tenglamalari silindrik koordinatalar sistemasida elastiklik nazariyasining uch o‘lchamli masalasi doirasida keltirib chiqariladi. Garmonik to‘lqinlar ko‘rinishidagi yechimlar yordamida masala xususiy qiymatlar haqidagi chegaraviy masalaga keltiriladi. Har bir qatlam uchun aniq analitik yechimlar qurilgan, dispersiyaviy bog‘lanishlar esa qatlamlar chegaralarida ideal kontakt shartlarini hamda tashqi sirtda tegishli chegaraviy shartlarni qo‘llash orqali olingan. Materialning nobir jinsliligi va qatlam qalinligining dispersiyaviy xarakteristikalarga ta’siri tahlil qilingan. Natijalar muhandislik sohalarida qo‘llaniladigan ko‘p qatlamli silindrik konstruksiyalarni loyihalash va ularni buzmasdan nazorat qilish (defectoscopy) uchun amaliy ahamiyatga ega.*

Kalit so‘zlar: *o‘qqa nisbatan simmetrik to‘lqinlar, xususiy to‘lqinlar, ko‘p qatlamli silindr, strukturaviy nobir jinslilik, dispersiyaviy bog‘lanishlar.*

AXISYMMETRIC EIGENWAVES IN THREE-LAYER STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL BODIES

Annotation. *This paper investigates the propagation of axisymmetric eigenwaves in a three-layer cylindrical inhomogeneity along the radial direction. It is assumed that each layer is linearly elastic and characterized by distinct mechanical properties. The equations of motion are derived within the framework*

of the three-dimensional theory of elasticity in cylindrical coordinates. Using solutions in the form of harmonic waves, the problem is reduced to a boundary value eigenvalue problem. Exact analytical solutions are constructed for each layer, and dispersion relations are obtained by applying ideal contact conditions at the layer interfaces and appropriate boundary conditions on the outer surface. The influence of material inhomogeneity and layer thickness on the dispersion characteristics is analyzed. The results are of practical importance for the design and non-destructive testing of multilayered cylindrical structures used in engineering applications.

Keywords: *axisymmetric waves, eigenwaves; multilayered cylinder, structural inhomogeneity, dispersion relations.*

1. Введение. Многослойные цилиндрические конструкции широко используются в современной технике, включая трубопроводы, сосуды под давлением, композитные валы и биомедицинские имплантаты [1–3]. Растущее использование слоистых и функционально неоднородных материалов стимулировало обширные исследования явлений распространения волн в таких конструкциях. В частности, осесимметричные направленные волны играют решающую роль в анализе вибраций, мониторинге состояния конструкций и неразрушающем контроле цилиндрических тел [4,5]. Классические исследования распространения волн в однородных цилиндрах восходят к хорошо известной теории Поххаммера-Кри. Однако реальные инженерные конструкции часто состоят из нескольких слоев с различными механическими свойствами, что приводит к структурной неоднородности, аналитические исследования собственных волн в многослойных конструкциях, структурная неоднородность которых существенно влияет на характеристики волн [6,7]. Несмотря на многочисленные численные исследования, аналитические исследования собственных волн в многослойных, структурно неоднородных цилиндрах остаются ограниченным [8-10]. Цель данной работы – разработка строгой аналитической основы для изучения аксиально-симметричных собственных волн в трехслойном цилиндрическом теле с радиально изменяющимися свойствами материала. Предложенный подход позволяет явно вывести дисперсионные соотношения и дает представление о влиянии контраста материала и геометрических параметров.

2.Постановка задачи и методики решения. Рассматривается трехслойное цилиндрическое тело бесконечной длины. Слои концентричны и идеально скреплены, занимая радиальные интервалы:

- слой 1: $0 \le r \le a$,слой 2: $a \le r \le b$, и слой 3: $b \le r \le c$

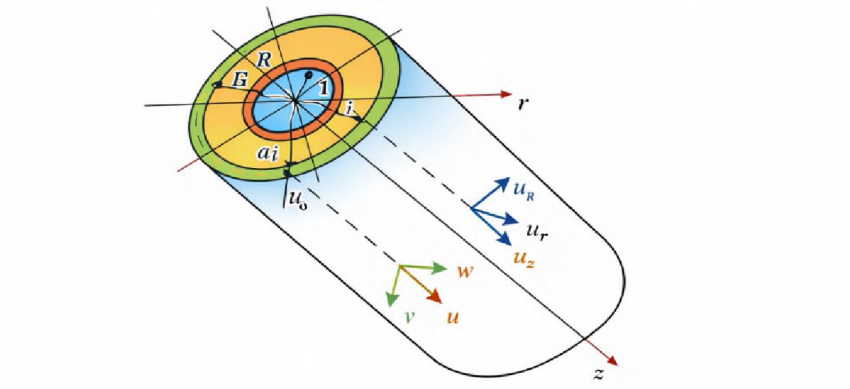


Рисунок 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки с наполнителем.

Предполагается, что каждый слой является линейно упругим, изотропным и структурно неоднородным, при этом свойства материала зависят от радиальной координаты r. Общий методики распространение волн в многослойных вязкоупругих цилиндрах. В рамках трехмерной теории упругости уравнения будем искать перемещение слоев $\vec{u}_k(r,z,t)(k=1,.....,N)$ для осесимметричного цилиндра ($|z|<\infty$, $0 \le r \le R_N$). Рассмотрим уравнение вязко упругости в перемещениях [11]:

$$(\lambda_{0\kappa}+\mu_{0\kappa})\Gamma^{(k)}_{\lambda\mu}\,graddiv\vec{u}_k+\mu_{0\kappa}\Gamma^{(k)}_{\mu}(\nabla^2\vec{u}_k)=\rho_\kappa\frac{\partial^2\vec{u}_k}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где $\Gamma_{\lambda\mu}^{(k)} = 1 - \Gamma_{\lambda\mu k}^{c}(\omega_R) - i\Gamma_{\lambda\mu k}^{s}(\omega_R), \Gamma_{\mu}^{(k)} = 1 - \Gamma_{\mu k}^{c}(\omega_R) - i\Gamma_{\lambda\mu k}^{s}(\omega_R),$ u_{κ} - перемещения. Плотность $\rho(r)$, Ламе параметры $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ являются кусочно-определенными функциями, соответствующими каждому слою.

Цель состоит в определении собственных волн, распространяющихся вдоль оси цилиндра, и установлении соответствующих дисперсионных соотношений.

При осесимметричном движении все полевые переменные не зависят от окружной координаты θ, а составляющая окружного смещения равна нулю

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0, \qquad u_{\theta} = 0 \ . \tag{2}$$

На границах раздела предполагается идеальный механический контакт. Следовательно, должны выполняться следующие условия непрерывности:

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= u_r^{(k+1)}, \\ u_z^{(k)} &= u_z^{(k+1)}, \\ \sigma_{rr}^{(k)} &= \sigma_{rr}^{(k+1)}, \\ \sigma_{rz}^{(k)} &= \sigma_{rz}^{(k+1)}, \end{aligned} \tag{3}$$

На внешней $r = c$ поверхности накладываются граничные условия, исключающие натяжение:

$$\sigma_{rr}(c) = 0, \quad \sigma_{rz}(c) = 0 \ . \tag{4}$$

Для анализа собственных волн, распространяющихся вдоль осевого направления, используется гармоническое решение.

$$\begin{aligned} u_r(r,z,t) &= U_r(r)e^{i(kz-\omega t)}, \\ u_z(r,z,t) &= U_z(r)e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Предполагается, что, где k – осевое волновое число, а ω – угловая частота.

Подстановка этих выражений в управляющие уравнения приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиальной координаты r . Для каждого слоя решение может быть выражено через функции Бесселя. Граничные и межфазные условия приводят к однородной системе алгебраических уравнений для неизвестных констант в радиальных решениях. С учетом величины фазовой скорости c_{ϕ} решение уравнений (5) принимает вид [6]:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{*} &= A(\alpha)K_1(\sqrt{1-\Gamma_s^{\mathrm{g}}M_s^2}\,\beta_{\alpha}r_{\varepsilon}) + B(\alpha)I_1(\sqrt{1-\Gamma_s^{\mathrm{g}}M_s^2}\,\beta_{\alpha}r_{\varepsilon}) \ \ (\left|\Gamma_s^{\mathrm{g}}M_s\right| < 1); \\ u_{\theta}^{*} &= A(\alpha)\frac{1}{r_{*}} + B(\alpha)r_{\varepsilon} \ \ (\left|\Gamma_s^{\mathrm{g}}M_s\right| = 1); \\ u_{\theta}^{*} &= A(\alpha)Y_1(\sqrt{1-\Gamma_s^{\mathrm{g}}M_s^2}\,\beta_{\alpha}r_{*}) + B(\alpha)J_1(\sqrt{1-\Gamma_s^{\mathrm{g}}M_s^2}\,\beta_{\alpha}r_{\varepsilon}) \ \ (\left|\Gamma_s^{\mathrm{g}}M_s\right| > 1). \end{aligned} \tag{5}$$

Где

$$\Gamma_s^{\mathrm{g}} = 1 - \Gamma_{G_s}^{C}(\omega_R) - i\Gamma_{G_s}^{S}(\omega_R) = \Gamma_p^{\mathrm{g}}, \ \gamma_k = G_{0k}/G_{0s} \ ,$$

$$c_{0ps} = \left[\frac{2G_{0s}(1-\nu_s)}{\rho_s(1-2\nu_s)}\right]^{1/2}; \qquad c_{0ss} = \left[\frac{G_{0s}}{\rho_s}\right]^{1/2}.$$

Нетривиальное решение существует только в том случае, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, что приводит к дисперсионному уравнению.

$$D(\omega,k) = 0.$$

Это уравнение неявно определяет дисперсионные кривые аксиально-симметричных собственных волн в трехслойном неоднородном цилиндре.

Результаты и обсуждение. Полученные дисперсионные соотношения демонстрируют четкую зависимость от толщины слоя и свойств материала. На рис. 1.показано изменение фазовой скорости (действительной и мнимой части) в функции от волнового числа (для первых четырех мод колебаний: сплошные линии 1,2,3,4-соответственно реальные части фазовый скорости первой, второй, третьей, четвертой мод; прерывистые линии соответственно мнимые части фазовой скорости соответственно первой, второй, третьей, четвертой мод. Найденно, что изменения упругих параметров промежуточного слоя оказывают существенное влияние на низкочастотные моды осесимметричных собственных волн.

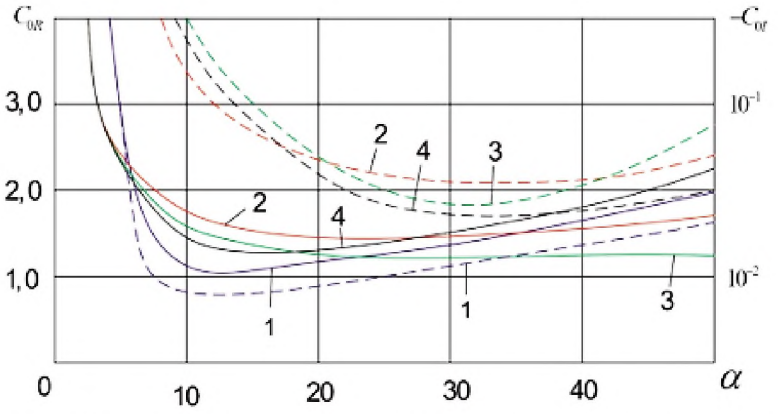


Рис. 1. Изменение фазовой скорости (действительной и мнимой части) в функции от волнового числа (для первых четырех мод колебаний: сплошные линии 1,2,3,4-соответственно реальные части фазовый скорости первой, второй, третьей, четвертой мод; прерывистые линии соответственно мни-мые части фазовой скорости соответственно первой, второй, третьей, четвертой мод.

Этот результатат особенно выражен в длинноволновом режиме, где динамический отклик структуры в основном определяется механическими свойствами среднего слоя. Результаты показывают, что соответствующая настройка свойств промежуточного слоя может эффективно использоваться для управления распространением волн. На основе предложенной формулировки выведено дисперсионное уравнение, описывающее динамическое поведение многослойной цилиндрической системы. Ввиду сложной и трансцендентной природы этого уравнения для получения дисперсионных свойств был использован численный метод решения. Полученные дисперсионные кривые указывают на наличие нескольких волновых мод и наглядно демонстрируют влияние структурной однородности и стратификации на осесимметричное распространение волн в воде. Численные результаты показывают, что изменения параметров материала и конфигурации слоев существенно влияют на фазовую скорость, частоты сдвига и модальную структуру волн. Это подчеркивает важность точного учета неоднородности материала при динамическом анализе композитных цилиндрических конструкций. Разработанная модель обеспечивает надежную теоретическую основу для прогнозирования волнового поведения в многослойных системах. Результаты этого исследования имеют практическое значение для анализа, проектирования и оптимизации композитных цилиндрических компонентов, широко используемых в инженерных приложениях, таких как трубопроводы, сосуды под давлением и слоистые оболочечные конструкции. Кроме того, полученные результаты могут быть эффективно применены в вибрационном анализе, мониторинге состояния конструкций и методах неразрушающего контроля, где осесимметричные волновые моды широко используются для обнаружения повреждений и характеристики материалов. Предложенный подход также обеспечивает прочную основу для дальнейшего расширения до более совершенных моделей материалов, включающих вязкоупругие, анизотропные или функционально градиентные цилиндрические структуры.

Заключение. Разработана строгая математическая модель для изучения распространения осесимметричных собственных волн в трехслойных, структурно неоднородных цилиндрических телах. Формулировка основана на фундаментальных уравнениях движения для каждого отдельного слоя, которые точно учитывают различия в свойствах материала по толщине структуры. Механическое

взаимодействие между соседними слоями описывается соответствующими условиями контакта и непрерывности, которые обеспечивают соответствие перемещений на границах раздела.

Список использованной литературы:

(1). Graff K.F. Wave motion in Elastic solids. Dover publications.

(2). Pochhammer L. Uber die fortpflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiszylinder.

(3). Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. North-Holland.

(4). Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar cylindrical coordinates.

(5). Сафаров И., Нуриддинов Б., Нуриддинов З. Распространение собственных волн в вязкоупругой цилиндрической панели переменной толщины. "Лобачевский журнал математики", 2024, т. 45, с. 1246–1253; [Safarov I., Nuriddinov B., Nuriddinov Z. Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness. "Lobachevskii Journal of Mathematics", 2024, vol. 45, pp. 1246–1253 (In English). doi: 10. 1134/S1995 080224600663].

(6). Нуриддинов Ж.З., Нуриддинов Б.З., Очалова З.Ш. Распространение собственных волн в плоских трехслойных средах. Изв. вузов. "Математика", 2024, № 10, с. 43–51 [Nuriddinov Zh.Z., Nuriddinov B.Z., Ochilova Z.Sh. Propagation of eigenwaves in plane three-layered media. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2024, vol. 68, № 10, p. 43–51 (In Russian). doi: 10.26907/0021-3446-2024-10-51-60].

(7). Safarov I.I., Usmonov B.Sh. Juraev S.I., Teshaev M.K. Natural Vibrations of a Viscoelastic Three-Layer Cylindrical Body. Russ Math. 2025, 69, p. 44–58 (2025). https://doi.org/10.3103/S1066369X25700240

(8). Bahodir Tursunov, Botir Usmonov, Baxtiyor Nuriddinov, Hakim Alimov, Utkirbek Qurbonov. Study on the oscillations of the Euler-Bernoulli beam on an elastic base. AIP Conf. Proc. 24 February 2025; 3268 (1): 020025. https://doi.org/10.1063/5.0260554

(9). Safarov I.I., Teshaev M.K., Nuriddinov B.Z., Ablokulov S.Z. Forced vibrations of hereditary deformable shell elements of aircraft structures in gas flow under influence of atmospheric turbulence.//In E3S Web of Conferences, 2023 (Vol. 401, p. 03017). EDP Sciences. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340103017

(10). Usmonov B.Sh. A numerical solution of hereditary equations with a weakly singular kernel for vibration analysis of viscoelastic systems. In Proceedings of the Latvian Academy of Sciences, Section B: Natural, Exact, and Applied Sciences, 2015, (Vol. 69, No. 6, pp. 326–330). DOI: 10.1515/prolas-2015-0048

(11). Usmonov B.Sh., Mahmood S.A., Salah B., Jlassi K., Khudayberdieva A., Shibl M.F., Eid K. Oxygen-enriched silicon carbide nanocrystals for efficient overall water splitting: Unveiling effect of doping and electrolyte pH // Catalysis Today, 2025, 115471. https://doi.org/10.1016/j.cattod.2025.115471

(12). Usmonov B.Sh., Mahmood S.A., Salah B., Jlassi K., Khudayberdieva A., Shibl M.F., Eid K. Data on enhancing the water electrolysis performance of silicon carbide nanoparticles in various electrolytes through oxygen doping// Data in Brief, 2025, 112023. https://doi.org/10.1016/j.dib.2025.112023

Марасулов Абдрахим Мустафаевич (д.т.н, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, Республика Казахстан, г. Туркестан; e-mail: abdrahim.marasulov@ayu.edu.kz),

Баялы Азимхан Тохтасынович (Старший преподаватель, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, Республика Казахстан, г. Туркестан; e-mail: azimkhan.bayaly@ayu.edu.kz),

Намозов Жасур Шокулович (к.т.н, старший преподаватель, Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, Республика Узбекистан, г. Термез; e-mail: jasurnamozov786@gmail.com)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕДАХ

Аннотация. *При исследовании процессов распространения и затухания волн в упругих слоисто-однородных средах с плоскопараллельными границами раздела первоочередной задачей является определение дисперсионных характеристик указанных волн.*

Ключевые слова: *среда, напряжения, деформации, деформирования вязкоупругих тел, уравнения.*

VISKOELASTIK VOSITALARDA TO‘LQINLARNING TARQALISHI

Annotatsiya. *Yassi parallel interfeys chegaralari bo‘lgan elastik qatlamli bir xil muhitda tarqalish jarayonlarini, so‘nayotgan to‘lqinlarni o‘rganishda, birinchi navbatda, ushbu to‘lqinlarning dispersiya xususiyatlarini aniqlash kerak.*

Kalit so‘zlar: *muhit, stresslar, deformatsiyalar, viskoelastik jismlarning deformatsiyalari, tenglamalar.*