[13]. Pfeifer R.N.C., Nieminen T.A., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H. Colloquium: Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media // Reviews of Modern Physics. 2007, vol. 79, p. 1197.

[14]. Beth R.A. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light // Physical Review. 1936, vol. 50, p. 115.

[15]. Ashkin A. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure // Physical Review Letters. 1970, vol. 24, p. 156.

[16]. Ashkin A., Dziedzic J.M., Bjorkholm J.E., Chu S. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles // Optics Letters. 1986, vol. 11, p. 288.

[17]. Chu S. Nobel Lecture: The manipulationn of neutral particles // Reviews of Modern Physics. 1998, vol. 70, p. 685.

[18]. Gieseler J., Martinez A.J., Taylor M.A., Novotny L. Advances in Optics and Photonics. 2021, vol. 13, p. 74.

[19]. Dholakia K., Zemánek P. Colloquium: Gripped by light: Optical binding // Reviews of Modern Physics. 2010, vol. 82, p. 1767.

[20]. Padgett M. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2011, vol. 467, p. 3393.

Янгибоев Зойир Шобердиевич (к.ф.-м.н., Каршинский государственный университет, доцент кафедры «Математический анализ и дифференциальные уравнения»),
Хужаев Лочин Хусанович (к.ф.-м.н., Каршинский государственный технический университет, доцент кафедры высшей математики; z.yangiboyev@qarshidu.uz)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Аннотация. *В данной статье рассматривается обратная задача для одномерного линейного гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами и постоянным запаздывающим аргументом – задача определения неизвестной функции источника* $f(t)$. *В отличие от прямой задачи, здесь в качестве дополнительной информации задается значение решения во внутренней точке области. Постановка обратной задачи, существование и единственность ее решения обоснованы полностью доказанной теоремой. Решение строится с использованием метода Фурье и аппарата интегральных уравнений Вольтерра. Полученные результаты могут быть использованы при идентификации и управлении динамическими системами с запаздыванием.*

Ключевые слова: *обратная задача, гиперболическое уравнение, запаздывающий аргумент, функция источника, метод Фурье, существование и единственность.*

Yangiboyev Zoyir Shoberdiyevich (Qarshi davlat universiteti "Matematik analiz va differensial tenglamalar" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.f.d., Phd),
Xo'jayev Lochin Husanovich (Qarshi davlat Texnika universiteti "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.f.d., Phd); z.yangiboyev@qarshidu.uz)

O'ZGARMAS KECHIKUVCHI ARGUMENTGA EGA BIR O'LCHOVLI GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN TESKARI MASALA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada o'zgarmas koeffitsiyentli va o'zgarmas kechikuvchi argumentga ega bir o'lchovli chiziqli giperbolik tenglama uchun teskari masala – noma'lum manba funksiyasini aniqlash masalasi ko'rib chiqiladi. To'g'ri masaladan farqli ravishda, bu yerda qo'shimcha ma'lumot sifatida sohaning ichki nuqtasidagi yechimning qiymati beriladi. Teskari masalaning qo'yilishi, uning yechimi mavjudligi va yagonaligi to'liq isbotlangan teorema orqali asoslanadi. Masalani yechish uchun Furye usuli va Volterra integral tenglamalari apparatidan foydalaniladi. Olingan natijalardan kechikishga ega dinamik tizimlarni identifikatsiyalash va boshqarishda foydalanish mumkin.*

Kalit so'zlar: *teskari masala, giperbolik tenglama, kechikuvchi argument, manba funksiyasi, Furye usuli, mavjudlik va yagonalik.*

Yangiboyev Zoyir Shoberdievich (PhD, Karshi State UniversityAssociate Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations),
Khujaev Lochin Khusanovich (PhD), Karshi State Technical University (Associate Professor, Department of Higher Mathematics); z.yangiboyev@qarshidu.uz)

INVERSE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH A CONSTANT DELAYED ARGUMENT

Annotation. *This paper considers an inverse problem for a one-dimensional linear hyperbolic equation with constant coefficients and a constant delayed argument, namely, the problem of determining*

an unknown source function. Unlike the direct problem, the value of the solution at an interior point of the domain is prescribed as additional information. The formulation of the inverse problem and the existence and uniqueness of its solution are justified by a fully proved theorem. The solution is constructed using the Fourier method and the theory of Volterra integral equations. The obtained results can be used for the identification and control of dynamical systems with delay.

Keywords: *inverse problem, hyperbolic equation, delayed argument, source function, Fourier method, existence and uniqueness.*

1. Введение. Обратные задачи являются одним из актуальных направлений современ-ной математической физики. В таких задачах уравнение или его коэффициенты, функции источника, начальные или граничные условия частично неизвестны, и для их определения используются дополнительные сведения о решении [1, 2, 3].

Обратные задачи для уравнений с запаздывающим аргументом изучены сравнительно мало [4,5]. Особенно важное практическое значение имеет задача определения функции источника в гиперболических уравнениях с запаздыванием: локализация неизвестных источников в акустике [6], идентификация источников сигналов в биологии [7], восстановление неизвестных входных сигналов в системах управления [8] и др. Исследованию обратных задач определения источников для гиперболических уравнений и уравнений с памятью/запаздыванием посвящены работы многих зарубежных ученых, таких как М.Ямамото [10], М.В.Клибанов [11], А.Хасанов [12] и др.

В данной работе ставится обратная задача к прямой задаче: функция источника $f(t)$ считается неизвестной, а вместо нее в качестве дополнительной информации задается значение решения во внутренней точке $x = x_0$ области.

2. Постановка прямой задачи. В области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t \le T\}$ рассматривается уравнение с запаздывающим аргументом $\tau > 0$:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + bu(x,t-\tau) = f(t)\cdot h(x), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $h(x)$ – известная функция.

Граничные условия:

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Начальные условия и предыстория:

$$u(x,t) = \phi(x,t), \quad (x,t) \in [0,\pi]\times[-\tau,0]. \tag{3}$$

Условия согласования:

$$\phi(0,t) = \phi(\pi,t) = 0, \quad t \in [-\tau,0]. \tag{4}$$

В прямой задаче функция источника $f(t)$ считается известной, и требуется найти $u(x,t)$.

3. Постановка обратной задачи. В обратной задаче функция $f(t)$ неизвестна, а вместо нее задано значение решения $u(x,t)$ во внутренней точке $x_0 \in (0,\pi)$:

$$u(x_0,t) = g(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

где $g(t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Обратная задача. Найти пару функций $\{u(x,t), f(t)\}$, удовлетворяющую условиям (1)–(3) и дополнительному условию (5).

4. Метод решения и основной результат. Представляя решение $u(x,t)$ в виде ряда Фурье по ортогональной системе $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin(nx), \tag{6}$$

получаем представление решения:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t K_n(t-s)f(s)ds\right)h_n \sin(nx), \tag{7}$$

где $u_0(x,t)$ – решение при $f(t) \equiv 0$ (известная функция), $h_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\sin(nx)dx$, а $K_n(t)$ – ядро, определяемое с учетом запаздывающего аргумента.

Подставляя дополнительное условие (5) в (7) при $x = x_0$, получаем интегральное уравнение:

$$g(t) = u_0(x_0,t) + \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(nx_0)K_n(t-s)\right)f(s)ds. \tag{8}$$

Применяя дифференцирование к (8) по t, сводим задачу к линейному интегральному уравнению Вольтерра II рода относительно $f(t)$:

$$f(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds = F(t), \tag{9}$$

где $F(t)$ определяется через $g'(t)$ и $u_0(x_0,t)$.

Теорема 1 *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. Выполнены условия гладкости данных прямой задачи;
2. $g(t) \in C^1[0,T]$, $h(x) \in C[0,\pi]$ и выполнено условие согласования $g(0) = u_0(x_0,0)$;
3. $\dfrac{x_0}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ (т. е. $\dfrac{x_0}{\pi}$ – иррациональное число), а коэффициенты $h_n \neq 0$ для всех $n \geq 1$.

Тогда обратная задача (1)–(3), (5) имеет единственное решение $\{u(x,t), f(t)\} \in C^{2,1}(Q_T) \times C[0,T]$ при $t \in [0,T]$.

5. Доказательство теоремы. 1. Единственность решения. Для доказательства единственности предположим, что существуют два решения $\{u_1, f_1\}$ *и* $\{u_2, f_2\}$. Тогда их разности $v = u_1 - u_2$ *и* $f = f_1 - f_2$ удовлетворяют однородной задаче:

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) + bv(x,t-\tau) = f(t)\cdot h(x), \tag{10}$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \tag{11}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,\pi]\times[-\tau,0], \tag{12}$$

$$v(x_0,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Раскладывая $v(x,t)$ в ряд Фурье $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin(nx)$, для каждого коэффициента $v_n(t)$ получаем дифференциальное уравнение с запаздыванием:

$$v_{n''}(t) + a^2 n^2 v_n(t) + bv_n(t-\tau) = h_n f(t), \quad v_n(t) = 0,\ t \leq 0. \tag{14}$$

Из условий (13) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin(nx_0) = 0$. Так как $\frac{x_0}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, имеем $\sin(nx_0) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это приводит к однородному интегральному уравнению Вольтерра относительно $f(t)$:

$$f(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds = 0. \tag{15}$$

Согласно теореме о единственности решений интегральных уравнений Вольтерра II рода [9], уравнение (15) имеет только тривиальное решение $f(t) \equiv 0$ на $[0,T]$. Из $f(t) \equiv 0$ следует $v_n(t) \equiv 0$, а значит, и $v(x,t) \equiv 0$. Единственность доказана.

2. Существование решения. Для доказательства существования рассмотрим операторное уравнение Вольтерра (9). Из гладкости функций $g(t)$ и $h(x)$ следует непрерывность правых частей и ядра $K(t,s)$.

Применяя метод последовательных приближений:

$$f^{(0)}(t) = F(t),$$

$$f^{(k)}(t) = F(t) - \int_0^t K(t,s)f^{(k-1)}(s)ds, \quad k = 1,2,\ldots \tag{16}$$

Ряд последовательных приближений сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,T]$, так как ядро $K(t,s)$ ограничено. Следовательно, существует единственная функция $f(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющая уравнению (9).

Подставляя найденную функцию $f(t)$ в ряд (7), получаем функцию $u(x,t)$. Благодаря условиям на гладкость $h(x)$ и иррациональности $\frac{x_0}{\pi}$, данный ряд и его производные до второго порядка сходятся равномерно в Q_T, следовательно, $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T)$.

Таким образом, найденная пара $\{u(x,t), f(t)\}$ удовлетворяет уравнениям (1)–(3) и условию (5).

Теорема полностью доказана.

6. Алгоритм решения обратной задачи:

1. Решить однородную часть прямой задачи при $f(t) \equiv 0$, определить функцию $u_0(x,t)$.
2. Вычислить коэффициенты Фурье h_n функции источника $h(x)$.
3. Составить ядро $K(t,s)$ и свободный член $F(t)$ для интегрального уравнения Вольтерра (9).
4. Найти $f(t)$ методом последовательных приближений или методом резольвент.
5. Подставить найденную $f(t)$ в ряд Фурье (7) и восстановить поле $u(x,t)$.

7. Результаты и обсуждение. Основные преимущества предложенного подхода:

• Использование метода Фурье позволяет точно свести дифференциально-функциональное уравнение к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода.

• Условие иррациональности $\frac{x_0}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ обеспечивает отсутствие полноты нулевых точечных измерений (отсутствие узловых точек на графиках собственных функций).

• Доказательство полностью строгое и опирается на классические теоремы сходимости.

Перспективы дальнейших исследований:

1. Случай переменного запаздывания $\tau(t)$;
2. Нелинейные функции источника $f(t,u)$;
3. Многомерные области по пространственным переменным;
4. Совместное восстановление коэффициентов уравнения и функции источника.

8. Заключение. В работе успешно поставлена и математически обоснована обратная задача по восстановлению функции источника в гиперболическом уравнении с постоянным запаздыванием. Выведено эквивалентное интегральное уравнение и строго доказана теоре-ма о существовании и единственности. Полученные результаты готовы к практическому применению при идентификации систем с задержкой.

Список использованной литературы:

[1]. Искандаров С. Обратные задачи. Ташкент, 2015.

[2]. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2011.

[3]. Прилепко А.И., Орловский Д.Г., Васин И.А. Методы решения обратных задач математической физики. М., Физматлит, 2000.

[4]. Джаналиев М.Т., Рамазанов М.И. Об обратных задачах для гиперболических уравнений с запаз-дыванием. Дифференциальные уравнения. 2009, т. 45, № 2, с. 245–256.

[5]. Морс П.М., Ингард К.У. Теоретическая акустика. М., "Мир", 1973.

[6]. Мюррей Дж.Д. Математическая биология. М., "Мир", 2009.

[7]. Никулеску С.-И. Влияние запаздывания на устойчивость: подход к робастному управлению. "Спрингер", 2001.

[8]. Грипенберг Г., Лонден С.О., Стаффанс О. Интегральные и функциональные уравнения Вольтерра. Кембридж, 1990.

[9]. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., "Наука", 1986.

[10]. Yamamoto M. (2009). Uniqueness and stability in multidimensional inverse problems for hyperbolic equations. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 17(8), p. 737–766.

[11]. Klibanov M.V., Timonov A.A. (2004). Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Applications. VSP, Utrecht.

[12]. Hasanov A. (2009). Identification of an unknown source term in a vibrating system from final overdetermination. Applied Mathematical Modelling, 33(1), p. 403–415.

Norov Abdurahmon Qiyomiddin o'g'li (Acting Associate Professor, Department of Languages, Exact and Social Sciences, TMCI; norov9770@gmail.com),

Islamov Yorqin Abduxakimovich (Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University; Islamovyorqin72@gmail.com)

A FREE-BOUNDARY LOTKA–VOLTERRA COMPETITION SYSTEM WITH NONLINEAR ADVECTION AND TIME-DEPENDENT REMOVAL

Annotation. *We study a free-boundary model for two competing populations in a one-dimensional habitat, incorporating nonlinear self-advection and time-dependent proportional removal. The common boundary moves according to a weighted sum of the populations outward diffusive fluxes. Comparison estimates and a fixed-domain transformation yield positivity, uniform population bounds, monotone boundary expansion, an upper bound on boundary speed, and global existence and uniqueness of classical solutions. When removal sufficiently exceeds intrinsic growth, both populations decay exponentially and the boundary approaches a finite limit. The model accommodates seasonal or controlled removal.*

Keywords: *reaction–diffusion system, nonlinear advection, time-dependent removal, Lotka–Volterra competition, common free boundary, global existence, exponential extinction.*

CHIZIQSIZ ADVEKSIYA VA VAQTGA BOG'LIQ KAMAYTIRISHNI HISOBGA OLUVCHI ERKIN CHEGARALI LOTKA–VOLTERRA RAQOBAT SISTEMASI

Annotatsiya. *Bir o'lchamli hududda raqobatlashuvchi ikki populyatsiya uchun chiziqsiz adveksiya va vaqtga bog'liq proporsional kamaytirishni hisobga oluvchi erkin chegarali model o'rganiladi. Adveksiya har bir populyatsiyaning o'z zichligiga bog'liq bo'lib, umumiy chegaraning harakati ikkala populatsiyaning tashqariga yo'nalgan diffuzion oqimlari vaznli yig'indisi bilan belgilanadi. Taqqoslash usuli va masalani qo'zg'almas sohaga o'tkazish orqali zichliklarning musbatligi va tekis chegaralanganligi, hudud-*