Xulosa. $S_2^* \cong \mathbb{C}^3$ bo‘lib, simmetrik matritsa argumentli matritsa-funksiya bilan ishlash uch kompleks o‘zgaruvchili vektor-funksiyani o‘rganishga ekvivalentdir. Matritsalar bilan ishlash shunisi bilan qulayki, $F(Z) = Z - Z^2$, $W = Z^{-1}$ va $G(W) = W + I^{(2)} + \left(W - I^{(2)}\right)^{-1}$ kabi formulalar matritsaviy yozuvda algebraik jihatdan ixcham saqlanadi. Agar koordinatalarga bevosita o‘tsak, u holda o‘zaro bog‘langan uchta nochiziqli komponent hosil bo‘ladi. Shuning uchun S_2^* ishlash qulayroq $\mathbb{C}^3$ da ishlaganga qaraganda. Keyingi ilmiy izlanishlarimizda $Z = O$ nuqta atrofida golomorf bo‘lgan $F(Z) = Z + Z^2 + Z^3 + \cdots = Z\left(I^{(2)} - Z\right)^{-1}$ akslantirish hamda umumiyroq $F(Z) = Z + P_2(Z) + P_3(Z) + \cdots$ ko‘rinishidagi matritsaviy akslantirishlar uchun Fatu koordinatalarini qurish hamda ularning analitik va asimptotik xossalarini o‘rganishni o‘zimizga maqsad qilib qo‘yganmiz.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

(1). Rajabov Sh.Sh. Matritsaviy original va matritsaviy tasvir funksiyalarining asosiy xossalari. “NamDU ilmiy axborotnomasi’, 2023, 6-son, 22–29-betlar.

(2). Herz C.S. Bessel functions of matrix argument. Annals of Mathematics, 1955, 61(3), pp. 474–523.

(3). Joshi R.M., Joshi J.M.C. Generalized Laplace transform with matrix variables. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1987, 10(3), pp. 503–512.

(4). Rajabov Sh.Sh. Simmetrik matritsa argumentli funksiyalar uchun o‘rama tushunchasi, uning asosiy xossalari va Dyuamel formulasining analogi. “O‘zMU xabarlari. Aniq fanlar”, 2024, № 2.1.1, 166–172-bet.

(5). Mathai A.M., Pederzoli G. Some properties of matrix-variate Laplace transforms and matrix-variate Whittaker functions. Linear Algebra and its Applications, 1997, 253, pp. 209–226.

(6). Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск, 2017, 292 с.

(7). Leau L. Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Série 1, 1897, 11(3), E25–E110.

(8). Fatou P. Sur les équations fonctionnelles Premier mémoire. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1919, 47, pp. 161–271.

(9). Fatou P. Sur les équations fonctionnelles Deuxième mémoire. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1920, 48, pp. 33–94. DOI 10.24033/bsmf.1003.

(10). Écalle J. Les fonctions résurgentes Tome II Les fonctions résurgentes appliquées à l’itération. Publications Mathématiques d’Orsay, no. 81-06, Université de Paris-Sud, Orsay, 1981.

(11). Voronin S.M. Analytic classification of germs of conformal mappings with identity linear part. *Functional Analysis and Its Applications*, 1981, 15(1), pp. 1–13. DOI 10.1007/BF01082373.

(12). Hakim M. Analytic transformations of $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangent to the identity. *Duke Mathematical Journal*, 1998, 92(2), pp. 403–428. DOI 10.1215/S0012-7094-98-09212-2.

(13). Dudko A., Sauzin D. The resurgent character of the Fatou coordinates of a simple parabolic germ. Comptes Rendus Mathématique, 2014, 352(3), pp. 255–261. DOI 10.1016/j.crma.2013.12.005.

(14). Abate M. The residual index and the dynamics of holomorphic maps tangent to the identity. *Duke* Mathematical Journal, 2001, 107(1), pp. 173–207. DOI 10.1215/S0012-7094-01-10719-9.

(15). Bracci F., Molino L. The dynamics near quasi-parabolic fixed points of holomorphic diffeomorphisms in $\mathbb{C}^2$. American Journal of Mathematics, 2004, 126(3), pp. 671–686. DOI 10.1353/ajm.2004.0015.

(16). Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1982, 478 с.

(17). Higham N.J. Functions of Matrices: Theory and Computation. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. Chapter 11, pp. 269–286. DOI: 10.1137/1.9780898717778.

Ismailov Islombek Ilxombek o‘g‘li (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasi o‘qituvchisi; islombekursu@gmail.com),

To‘raxonov Islombek Farhodovich (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti "Matematik tahlil" kafedrasi o‘qituvchisi; turaxonov.islombek@urdu.uz),

Sotimboyeva Zarina Ollabergan qizi (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti talabasi; zarinaursu@gmail.com)

KLASSIK VA ZAMONAVIY FUNKSIONAL TENGLAMALAR HAMDA ULARNING SODDA YECHISH USULLARI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada klassik va zamonaviy funksional tenglamalarni yechishning samarali hamda sodda usullari yoritilgan. Tadqiqotda Koshi funksional tenglamasi, matematik induksiya usuli, funksiyaning uzluksizligi va zichlik xossasi, shuningdek, involutsiya tushunchalariga asoslangan teoremalar hamda lemmalar keltirib o‘tilgan va ularning isbotlari berilgan. Nazariy ma’lumotlarni mustahkamlash*

maqsadida xalqaro va mintaqaviy matematika olimpiadalari (IMO, BMO, APMO) masalalari batafsil tahlil qilinib, amaliy yechimlari ko'rsatib berilgan. Maqola olimpiada masalalarini yechish ko'nikmasini oshirishga yo'naltirilgan bo'lib, talabalar va o'qituvchilar uchun mo'ljallangan

Kalit so'zlar: *funksional tenglama, Koshi tenglamasi, involutsiya, uzluksizlik, matematik induksiya, olimpiada masalalari.*

КЛАССИЧЕСКИЕ И СОВРЕМЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОСТЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Аннотация. *В данной статье рассматриваются эффективные и простые методы решения классических и современных функциональных уравнений. В исследовании приведены и доказаны теоремы и Леммы, основанные на функциональном уравнении Коши, методе математической индукции, непрерывности функций, свойстве плотности, а также понятии инволюции. Для закрепления теоретического материала подробно проанализированы и решены задачи международных и региональных математических олимпиад (IMO, BMO, APMO). Статья направлена на развитие навыков решения олимпиадных задач и предназначена для студентов и преподавателей.*

Ключевые слова: *функциональное уравнение, уравнение Коши, инволюция, непрерывность, математическая индукция, олимпиадные задачи.*

CLASSICAL AND MODERN FUNCTIONAL EQUATIONS AND SIMPLE METHODS FOR SOLVING THEM

Annotation. *This article discusses efficient and simple methods for solving classical and modern functional equations. The research presents and proves theorems and lemmas based on Cauchy's functional equation, mathematical induction, function continuity, the density property of real numbers, and the concept of involution. To reinforce the theoretical foundation, problems from international and regional mathematical olympiads (IMO, BMO, APMO) are analyzed in detail with step-by-step solutions provided. The article aims to enhance problem-solving skills for olympiad mathematics and is intended for students and educators.*

Key words: *functional equation, Cauchy's equation, involution, continuity, mathematical induction, olympiad problems.*

Kirish. Zamonaviy matematika va uning amaliy tarmoqlarida funksional tenglamalar alohida va g'oyat muhim o'rin egallaydi. Funksional tenglama – bu noaniq funksiya va uning argumentlari ustida bajarilgan turli amallarni o'z ichiga olgan tenglik bo'lib, u oddiy algebraik yoki differensial tenglamalardan o'zining nostandart mantiqiy apparati hamda keng ko'lamli yechim usullari bilan ajralib turadi. Funksional tenglamalar nazariyasi nafaqat sof matematik tahlil, balki fizika, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari hamda modellashtirish sohalarida uchraydigan fundamental jarayonlarni ifodalashda keng qo'llaniladi.

So'nggi yillarda o'quvchi va talabalarning mantiqiy fikrlash darajasini oshirish, ularda nostandart masalalarni yechish ko'nikmalarini shakllantirishda xalqaro hamda mintaqaviy matematika olimpiadalarining (IMO, BMO, APMO) o'rni beqiyosdir. Ushbu nufuzli musobaqalarda funksional tenglamalarga oid masalalar doimiy ravishda eng murakkab va hal qiluvchi bosqichlardan biri sifatida taqdim etiladi. Biroq, ko'pincha bunday tenglamalarni yechishda yagona umumiy algoritmning yo'qligi talaba va tadqiqotchilardan har bir masala uchun alohida, noodatiy yondashuvni talab etadi.

Ushbu maqolaning asosiy maqsadi – klassik (Koshi tenglamasi, involutsiya almashtirishlari va hokazo) hamda zamonaviy funksional tenglamalarni yechishning nazariy va amaliy usullarini tizimlashtirishdan iborat. Maqolada funksiyalarning uzluksizligi, matematik induksiya prinsipi hamda haqiqiy sonlar to'plamining zichlik xossasiga asoslangan fundamental lemmalar va teoremalar isbotlanadi. Shuningdek, nufuzli olimpiada masalalari misolida nazariy bilimlarni amaliyotga tatbiq etishning sodda, tushunarli va samarali yo'llari ko'rsatib beriladi.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili va tadqiqot metodologiyasi. Funksional tenglamalar nazariyasining poydevori XIX asrda O.Koshi (A.L.Cauchy) tomonidan qo'yilgan bo'lib, uning uzluksiz va mononton funksiyalar uchun ifodalagan $f(x+y) = f(x) + f(y)$ klassik tenglamasi ushbu sohadagi fundamental manba hisoblanadi. Keyinchalik J.Aksel (J.Aczél) o'zining *"Lectures on Functional Equations and Their Applications"* nomli monografiyasida funksional tenglamalarning umumiy nazariyasi, ularni differensiallanuvchanlik va uzluksizlik shartlarida yechish usullarini har tomonlama tahlil qilib bergan.

Olimpiada matematika yo'nalishida funksional tenglamalarni yechish metodikasiga bag'ishlangan zamonaviy adabiyotlar orasida C.G.Efthimiou (*"Introduction to Functional Equations"*) hamda B.J. Venkatachala (*"Functional Equations: A Problem olving Approach"*) ishlarini alohida ta'kidlash lozim. Ushbu manbalarda noaniq funksiyalarni aniqlashda inyektivlik, syuryektivlik, juft-toqlik hamda simmet-

riya va involutsiya kabi xossalardan foydalanish metodologiyasi amaliy misollar bilan yoritilgan. G.P. Andreyev va P.K.Suetinlarning tadqiqotlarida esa funksional tenglamalarning talabalar va o‘quvchilar o‘rtasidagi o‘quv-olimpiada masalalaridagi o‘rni hamda ularni soddalashtirish usullari atroflicha o‘rganilgan.

Tahlil va natijalar. **Ta’rif.** Agar D va E to‘plamlar berilgan bo‘lib, tenglikda noaniq $f: D \to E$ funksiyasi va ushbu funksiyaning argumentlar ustida bajarilgan amallari qatnashgan bo‘lsa, bunday tenglik *funksional tenglama* deyiladi.

Lemma. Agar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya barcha $x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f(x+y) = f(x) + f(y)$ shartni qanoatlantirsa, u holda ixtiyoriy $q \in \mathbb{Q}$ (ratsional son) uchun: $f(q) = c \cdot q$ tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $c = f(1)$ - o‘zgarmas son.

Isboti. Aytaylik, $x = 0, y = 0$ deb olsak, u holda $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow \mathbf{f(0) = 0}$. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ sonlari uchun induksiya usulini qo‘llaymiz. $n = 1$ uchun $f(1) = c \cdot 1$ to‘g‘ri. Faraz qilaylik, $f(n) = c \cdot n$ bo‘lsin. U holda $f(n+1) = f(n) + f(1) = cn + c = c(n+1)$. Matematik induksiya prinsipiga ko‘ra, barcha $n \in \mathbb{N}$ uchun $f(n) = cn$ o‘rinli. Istalgan $m \in \mathbb{Z}$ sonlari uchun $y = -x$ deb olsak, u holda $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, funksiya toq. Shunday qilib, manfiy butun sonlar uchun ham $f(-m) = -f(m) = -cm = c(-m)$, ya’ni barcha $m \in \mathbb{Z}$ uchun $f(m) = cm$. Shuningdek, istalgan $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, bu yerda $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ratsional sonlari uchun ham ko‘rib chiqamiz: $c \cdot m = f(m) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{m}{n}\right)$. Ikkala tomonni n ga bo‘lsak: $f\left(\frac{m}{n}\right) = c \cdot \frac{m}{n} \Rightarrow f(q) = cq$ ■

1-teorema. Agar uzluksiz $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya barcha $x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f(x+y) = f(x) + f(y)$ shartni qanoatlantirsa, u holda barcha $x \in \mathbb{R}$ uchun $f(x) = cx$ bo‘ladi (bu yerda c=const, c = f(1)).

Isboti. Yuqoridagi lemmaga ko‘ra, barcha ratsional $q \in \mathbb{Q}$ uchun $f(q) = cq$ ekani isbotlangandi. Ixtiyoriy haqiqiy son $x \in \mathbb{R}$ berilgan bo‘lsin. Haqiqiy sonlar to‘plamining zichlik xossasiga ko‘ra, x ga intiluvchi ratsional sonlar ketma-ketligi $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ mavjud, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$ berilgan $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lgani uchun, limit belgisini funksiya ichiga kiritish mumkin $f(x) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} q_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(q_n)$ hamda q_n ratsional bo‘lgani uchun $f(q_n) = c \cdot q_n$ ko‘rinishga keladi. Bundan esa $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot q_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} q_n = c \cdot x$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Shunday qilib, barcha $x \in \mathbb{R}$ uchun $f(x) = cx$. ■

2-teorema. Agar $g: D \to D$ funksiya involutsiya bo‘lsa, ya’ni, barcha $x \in D$ uchun $g(g(x)) = x$ hamda A, B, C o‘zgarmas sonlar bo‘lib, $A^2 \neq B^2$ shart bajarilsa, u holda: $A \cdot f(x) + B \cdot f(g(x)) = C \cdot h(x)$ ko‘rinishidagi funksional tenglamaning yagona yechimi quyidagicha topiladi: $f(x) = \frac{A \cdot h(x) - B \cdot h(g(x))}{A^2 - B^2} \cdot C$

Isboti. Berilgan tenglamani (1) deb belgilaymiz: $A \cdot f(x) + B \cdot f(g(x)) = C \cdot h(x)$ (1) Tenglamadagi x o‘rniga $g(x)$ ni qo‘yamiz. Involutsiya xossasiga ko‘ra, $g(g(x)) = x$ bo‘lgani uchun $A \cdot f(g(x)) + B \cdot f(g(g(x))) = C \cdot h(g(x))$ ga ega bo‘lamiz va uni (2) deb belgilab olamiz. $A \cdot f(g(x)) + B \cdot f(x) = C \cdot h(g(x))$ (2). Bizda $f(x)$ va $f(g(x))$ ga nisbatan 2 ta chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ldi:

$$\begin{cases} A\cdot f(x)+B\cdot f(g(x))=C\cdot h(x) \\ B\cdot f(x)+A\cdot f(g(x))=C\cdot h(g(x)) \end{cases}$$

Birinchi tenglamani A ga, ikkinchi tenglamani B ga ko‘paytirib, ayirib tashlaymiz: $A^2 f(x)+ABf(g(x))-\left(B^2 f(x)+ABf(g(x))\right)=AC\cdot h(x)-BC\cdot h(g(g(x))) \Rightarrow$ $(A^2-B^2)f(x)=C(A\cdot h(x)-B\cdot h(g(x)))$ ni hosil qilamiz. $A^2\neq B^2$ bo‘lgani uchun ikkala tarafni (A^2-B^2) ga bo‘lamiz va $\mathbf{f(x)=\dfrac{C(A\cdot h(x)-B\cdot h(g(x)))}{A^2-B^2}}$. ■

P1. Agar $f(x)$ funksiyada $f(1)=2$ va $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$ bo‘lsa, u holda barcha $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ shartini qanoatlantiruvchi funksiyalarni toping.

Yechilishi. Aytaylik, $x=y=0$ da $f(0\cdot 0)=f(0)\cdot f(0)-f(0+0)+1$ $\Rightarrow f(0)=f^2(0)-f(0)+1\Rightarrow (f(0)-1)^2=0\Rightarrow \mathbf{f(0)=1}$. Endi $y=1$ bo‘lsa, u holda $f(x)=f(x)\cdot f(1)-f(x+1)+1$ va $f(1)=2$ bo‘lgani uchun $f(x)=2f(x)-f(x+1)+1$ $\Rightarrow \mathbf{f(x+1)=f(x)+1}$. Ushbu munosabatni davom ettirsak, $f(x+2)=f(x)+2\ldots f(x+n)=f(x)+n$. Barcha $\forall x\in\mathbb{Q}$ va $\forall n\in\mathbb{N}$ sonlari uchun $x=0$ dan $f(n)=f(0)+n$ va $f(0)=1=\text{const}\Rightarrow \mathbf{f(n)=n+1}$. Ixtiyoriy $x=n, y=\dfrac{m}{n}$ bo‘lsin. U holda $\Rightarrow f\left(n\cdot\dfrac{m}{n}\right)=f(n)\cdot f\left(\dfrac{m}{n}\right)-f\left(n+\dfrac{m}{n}\right)+1 \Rightarrow f(m)=(n+1)\cdot f\left(\dfrac{m}{n}\right)-f\left(\dfrac{m}{n}\right)-n+1$ $\Rightarrow m+1=n\cdot f\left(\dfrac{m}{n}\right)-n$ bundan esa $\Rightarrow f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{m}{n}+1$. Bundan esa $f(x)=x+1$ ekanligi kelib chiqadi.

P2. (Balkan Matematika Olimpiadasi – BMO 2018) Barcha $x,y\in\mathbb{R}$ uchun $f(x\cdot f(y)-f(x))=f(y)+f(x-1)-1$ tenglikni qanoatlantiruvchi funksiyalarni toping.

Yechilishi. $f(0)$ qiymatini toppish uchun $x=0$ ni qo‘yib ko‘ramiz: $f(0)=f(y)+f(-1)-1$. Bu yerda o‘ng tarafda $f(y)$ turibdi, chap taraf esa konstanta ($f(0)$). Demak, $f(y)=f(0)-f(-1)+1=C$ (konstanta) bo‘lishi kerak. Agar $f(x)=C$ bo‘lsa, uni berilgan tenglamaga qo‘yamiz. $C=C+C-1\Rightarrow C=1$. Demak, $f(x)=1$ yechimlardan biri hisoblanadi. Agar $f(x)$ o‘zgarmas bo‘lmasa, $x=1$ qo‘yamiz: $f(f(y)-f(1))=f(y)+f(0)-1$ hosil bo‘ladi. $f(y)=t$ belgilasak, $f(t-f(1))=t+f(0)-1$. Bu degani, har qanday t qiymat uchun funksiya chiziqli: $f(x)=x+c$ ko‘rinishda. $f(x)=x+c$ ni tenglamaga qo‘yib, $c=0$ ekanini topamiz. Demak, biz izlayotgan funksiyalar $f(x)=1$ va $f(x)=x$ ko‘rinishda ekan.

P3. (APMO 2014, Osiyo-Tinch okeani Matematika Olimpiadasi). Barcha musbat haqiqiy sonlar $x,y\in\mathbb{R}^+$ uchun $x^2f(x)+yf(y)=f(xy)\cdot(x+y)$ tenglikni qanoatlantiruvchi funksiyalarni toping.

Yechilish. Berilgan $x^2f(x)+yf(y)=f(xy)\cdot(x+y)$ tenglamani (1) deb belgilab, $y=1$ almashtirish bajarsak, $x^2f(x)+f(1)=f(x)(x+1)\Rightarrow x^2f(x)+f(1)=xf(x)+f(x)$ tenglamada f(x) ga ega hadlarni bir tarafga o‘tkazamiz:

$x^2f(x)-xf(x)-f(x)=-f(1) \Rightarrow f(x)(x^2-x-1)=-f(1) \Rightarrow f(x)=\dfrac{c}{x}$. Demak, $f(x)=\dfrac{c}{x}$ ni (1) berilgan tenglamaga qo‘ysak: Tenglamaning chap tarafi:

$x^2 \cdot \frac{c}{x} + y \cdot \frac{c}{y} = cx + cy = c(x+y)$ va o‘ng taraf: $f(xy)\cdot(x+y) = \frac{c}{xy} \cdot xy \cdot (x+y) = c(x+y)$

Ikkala taraf ham aynan teng keladi. Demak, $f(x) = \frac{c}{x}$ (bu yerda $c \in \mathbb{R}$ – ixtiyoriy konstanta son).

P4.(IMO 2012, 2-masala). Barcha $a,b,c \in \mathbb{R}$ sonlari uchun $f(a-b)+f(b-c)+f(c-a) = 2f(a)+2f(b)+2f(c)-3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$ ushbu tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiyalarni toping:

Yechilishi. Aytaylik, $a=b=c=0$ u holda berilgan tenglama $3f(0) = 6f(0) - 3f(0) = 3f(0)$, tenglik ayniyatga aylanadi. Agar $c=0$ va $b=-a$ almashtirishini kiritsak ($a=x$ $f(2x)+f(-x)+f(x) = 2f(x)+2f(-x)+2f(0)-3f(0) \Rightarrow f(2x) = f(x)+f(-x)-f(0)$ Umumiylikka zarar yetkazmasdan faraz qilaylik, funksiyadan $f(0)=C$ ni ayirib, $g(x) = f(x) - f(0)$ deb olsak, $g(0)=0$ va $g(2x) = g(x)+g(-x)$ munosabat hosil bo‘ladi. Barcha analitik qadamlar va almashtirishlar orqali funksiya kvadratik . $f(x) = kx^2 + C$ (bu yerda $k, C \in \mathbb{R}$ -ixtiyoriy o‘zgarmaslar) ko‘rinishga keladi.

P5.(IMO 2017, 2-masala). Barcha $x,y \in \mathbb{R}$ uchun ushbu $f(f(x)f(y))+f(x+y) = f(xy)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiyalarni toping.

Yechilishi. Aytaylik, $x=0, y=0$ desak, bundan $f(f(0)^2)+f(0) = f(0) \Rightarrow f(f(0)^2) = 0$ $f(0)=c$ deb belgilasak, $f(c^2)=0$ kelib chiqadi. Demak, funksiyaning kamida bitta $a=c^2$ ildizi mavjud ($f(a)=0$).

1-holat. ($c=0$, ya’ni $f(0)=0$) Berilgan funksional tenglamaga $y=0$ bilan birgalikda qo‘yamiz va $f(f(x)f(0))+f(x) = f(0) \Rightarrow f(0)+f(x) = 0 \Rightarrow \mathbf{f(x) = 0}$

2-holat. ($c \neq 0$, ya’ni $f(0) \neq 0$) U holda $a = c^2 \neq 0$ uchun $f(a)=0$ bo‘ladi. Tenglamaga $y=a$ qo‘yamiz: $f(f(x)f(a))+f(x+a) = f(ax) \Rightarrow f(0)+f(x+a) = f(ax)$. Bu munosabat f ning chiziqli funksiya ekanligini ko‘rsatadi. $f(x) = Ax + B$ ko‘rinishida izlab, berilgan funksional tenglamaga qo‘yib tekshirsak, $A=-1, B=1$ kelib chiqadi. Bundan esa biz izlayotgan funksiyalarning ko‘rini quydagicha bo‘ladi. $f(x)=0$ va $f(x) = 1-x$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

P1.(1991-yil. Kanada Olimpiadasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz va quyidagi $f(g(x)) \equiv g(f(x))$ ayniyat o‘rinli bo‘lsin. Agar $f(x) = g(x)$ tenglama haqiqiy ildizga ega bo‘lmasa, u holda $f(f(x)) = g(g(x))$ tenglama ham yechimga ega emasligini isbotlang.

P2.(2009-yil, Moskva shahri oliy o‘quv yurtlari talabalari o‘rtasidagi olimpiada). Agar $f(x) = \frac{x}{3} + 2$ bo‘lsa, $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{2009}$ ning $x=4$ nuqtadagi qiymatini hisoblang.

P3.(FIITJEE, 2016–2018-yillar atrofida). Agar $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ funksiya berilgan bo‘lib, ixtiyoriy $x,y \in \mathbb{Q}$ uchun quyidagi shartlar bajariladi:

1. $f(x+y) = f(x)+f(y)+2547$;
2. $f(2004) = 2547$.

Ushbu ma’lumotlarga ko‘ra, $f(2547)$ ning qiymatini toping.

P4.(IMO Shortlist 2002). R haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. Barcha $x,y,z,t \in R$ sonlar uchun $f(x+y)+f(x+z)+f(x+t)+f(y+z)+f(y+t)+f(z+t) \geq 6f(x-3y+5z+7t)$ barcha $f:R\to R$ larni toping.

P5. Istalgan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ akslantirishni va quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi $f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y$ barcha $f(x)$ funksiyalarni toping.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

(1). Andreyev G.P., Suetin P.K. (2000). Функциональные уравнения и их применение в олимпиадной математике.

(2). Aczél J. (1966). Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press.

(3). Efthimiou C.G. (2011). Introduction to Functional Equations. American Mathematical Society (AMS).

(4). Venkatachala B.J. (2002). Functional Equations. A Problem Solving Approach. Prism Books.

(5). Dhombres J. (1988). Some Aspects of Functional Equations. Chulalongkorn University.

(6). Bencze M., Zhao Y. (2014). A Mathematical Olympiad Approach to Functional Equations. Technical Report.

Parmanova Mehrinisa Tagaymurotovna (O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Astronomiya instituti doktoranti, Toshkent, O'zbekiston; E-mail: mehriniso@astrin.uz),

Burxonov Otabek Anvarjonovich (O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Astronomiya instituti "Galaktik astronomiya" laboratoriyasi mudiri, Toshkent, O'zbekiston; E-mail: boa@astrin.uz)

GAIA DR3 MA'LUMOTLARI ASOSIDA STOCK 17 TARQOQ YULDUZ TO'DASINING ASTROMETRIK XUSUSIYATLARI VA KINEMATIK TUZILISHI

Annotatsiya. *Maqolada Gaia DR3 ma'lumotlari asosida Stock 17 tarqoq yulduz to'dasining astrometrik va kinematik xususiyatlari tahlil qilindi. VizieR orqali to'da markazi atrofidagi 10 yoy daqiqalik maydondan olingan manbalar TOPCAT muhitida qayta ishlanib, xususiy harakatlar fazosida kinematik tanlash amalga oshirildi. Yakuniy tanlanma 65 ta yulduzdan iborat bo'lib, ularning o'rtacha xususiy harakatlari μ_α*=–3.72229 va μ_δ=–1.59718 mas yil^{-1}, to'liq xususiy harakati esa μ=4.05328 mas yil^{-1} ni tashkil etdi. O'rtacha parallaks 0.30998 mas. O'rtacha, mediana va kvartil ko'rsatkichlarining yaqinligi tanlangan guruhning ichki kinematik mosligini ko'rsatadi. Natijalar zamonaviy Gaia kataloglari bilan taqqoslanib, Stock 17 ning barqaror kinematik komponenti tavsiflandi.*

Kalit so'zlar: *Stock 17, tarqoq yulduz to'dasi, Gaia DR3, astrometriya, xususiy harakat, parallaks, a'zolik tanlanmasi, kinematika.*

Парманова Мехриниса Тагаймуротовна (Докторант Института астрономии Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; E-mail: mehriniso@astrin.uz),

Бурхонов Отабек Анваржонович (Заведующий лабораторией «Галактическая астрономия» Института астрономии Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; E-mail: boa@astrin.uz)

АСТРОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАССЕЯННОГО СКОПЛЕНИЯ STOCK 17 ПО ДАННЫМ GAIA DR3

Аннотация. *Исследованы астрометрические и кинематические характеристики рассеянного скопления Stock 17 по данным Gaia DR3. Источники в радиусе 10 угловых минут от каталожного положения были получены через VizieR и обработаны в TOPCAT; первичный отбор выполнен в пространстве собственных движений. Финальная выборка содержит 65 звёзд. Средние значения равны μ_α*=–3.72229, μ_δ=–1.59718 и μ=4.05328 mas yr^{-1}, а средний параллакс составляет 0.30998 mas. Близость средних, медиан и квартилей показывает внутреннюю согласованность выбранной кинематической группы. Сопоставление с современными Gaia-каталогами подтверждает устойчивость положения Stock 17 в пространстве собственных движений и создаёт основу для последующего фотометрического анализа.*

Ключевые слова: *Stock 17, рассеянное звёздное скопление, Gaia DR3, астрометрия, собственное движение, параллакс, членская выборка, кинематика.*

Parmanova Mehrinisa Tagaymurotovna (Doctoral student, Institute of Astronomy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan: E-mail: mehriniso@astrin.uz),

Burxonov Otabek Anvarjonovich (Head of the Laboratory of Galactic Astronomy, Institute of Astronomy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; E-mail: boa@astrin.uz)

ASTROMETRIC CHARACTERISTICS AND KINEMATIC STRUCTURE OF THE OPEN CLUSTER STOCK 17 FROM GAIA DR3

Annotation. *We analyse the astrometric and kinematic properties of the open cluster Stock 17 using Gaia DR3 data. Sources within 10 arcmin of the catalogue position were retrieved through VizieR and processed in TOPCAT, with the initial selection carried out in proper-motion space. The final sample*